Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2017/18
Mittwoch, 06.06.2018
Aufgabenblatt 8

**Aufgaben zur Vorlesung:**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2**

1. Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$, sodass $m_A = f \cdot g$ und $\mathrm{Kern}(f(A)) \neq \mathrm{Im}(g(A))$.
   (ii) Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ mit reellen Einträgen, sodass $m_A = (x - i) \cdot x$.
   (iii) Wenn das Minimalpolynom von $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R})$ gleich $m_A = x^3 - x^2 + x - 1$ ist, dann gilt $\det(A) = -1$.
   (iv) Wenn das Minimalpolynom von $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ gleich $m_A = x^3 - x^2 + x - 1$ ist, dann gilt $\det(A) = -1$.
   (v) Die Matrizen $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$ sind ähnlich, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2. Sei $f_i : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{C}^3$ gegeben ist durch die darstellende Matrix $A_i$. Bestimmen Sie jeweils eine Basis $\mathcal{B}_i$ des $\mathbb{C}^3$, bezüglich derer die darstellende Matrix von $f_i$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Geben Sie auch diese obere Dreiecksmatrix an.

   $(*)\ A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (*)\ A_2 = \begin{pmatrix} i & i & i \\ 2i & 2i & 2i \\ 4i & 4i & 4i \end{pmatrix}$ $\qquad (*)\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Sei
$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ -16 & 11 & 2 & 14 \\ 4 & -2 & 1 & -8 \\ 4 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$
   (i) $(*)$ Geben Sie alle Eigenwerte von $A$ an, sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom.
   (ii) $(*)$ Bestimmen Sie $\mathrm{Im}((A - E_4)^2) \cap \mathrm{Im}(A + E_4)$ und $\mathrm{Kern}(A - E_4) \cap \mathrm{Kern}(A^2 - E_4)$.

4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $V$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U$ ein Unterraum von $V$. In Aufgabe 1.(iii) auf Blatt 6 wurde gezeigt, dass es einen basisunabhängigen Isomorphismus $(V/U)^* \longrightarrow U^\circ$ gibt. Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass es einen solchen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V/U)$ und $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(U^\circ)$ gibt.
   (i) Seien $\varphi \in U^\circ$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V/U)$. Wir definieren die Abbildung $\varphi_f : V \longrightarrow \mathbb{K}$ mit $\varphi_f(v) = \varphi(v_f)$, wobei $v_f$ ein Vektor in $V$ ist, sodass $f(v + U) = v_f + U$. Zeigen Sie, dass $\varphi_f$ eine wohldefinierte Abbildung ist und dass $\varphi_f \in U^\circ$.

(ii) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V/U)$. Wir definieren die Abbildung $\widehat{f} : U^\circ \longrightarrow U^\circ$ mit $\widehat{f}(\varphi) = \varphi_f$. Zeigen Sie, dass $\widehat{f}$ linear ist und dass $\widehat{f \circ g} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$ für alle $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V/U)$. Geben Sie einen Vektorraum-Isomorphismus $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V/U) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(U^\circ)$ an und begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Vergleichen Sie die Minimalpolynome von $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V/U)$ und $\widehat{f} \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(U^\circ)$. Zeigen Sie, dass $f$ diagonalisierbar ist genau dann, wenn $\widehat{f}$ diagonalisierbar ist.

*Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem (∗) gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 13.06.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:*

*www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18*