Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 30.05.2018
Aufgabenblatt 7

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Wenn $f : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ und $f^l = \mathrm{id}_V$ für eine natürliche Zahl l, dann gilt $f^n = \mathrm{id}_V$.
   (ii) Es gibt eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{C})$ mit Minimalpolynom $m_A = (x-i)(x-1)$.
   (iii) Wenn $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, dann gilt $m_{AB} = m_{BA}$.
   (iv) Wenn das Minimalpolynom von $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ gleich $x^2 - 1$ ist, dann ist A eine Diagonalmatrix.
   (v) Das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ hat Grad 2.

2. $(*)$ Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $f^3 = f$. Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

3. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir betrachten die diagonalisierbaren Abbildungen $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und nehmen an, dass $f \circ g = g \circ f$.
   (i) $(*)$ Zeigen Sie, dass es eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V gibt, sodass jedes v_i ein Eigenvektor von f und von g ist.
   (ii) $(*)$ Zeigen Sie, dass die Abbildung $f \circ g$ diagonalisierbar ist. Ist auch $\alpha f + \beta g$ diagonalisierbar für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Finden Sie alle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C})$, für die es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{C})$ mit $B^2 = A$ gibt.

5. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Sei zudem $s \in \{1, ..., n-1\}$. Zeigen Sie: Wenn jeder Unterraum $U \subset V$ mit $\dim_{\mathbb{R}} U = s$ invariant bleibt unter f, dann existiert ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

6. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(4\times 4, \mathbb{R})$ das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und eine maximale Zerlegung des Minimalpolynoms in teilerfremde Faktoren. Geben Sie auch eine entsprechende Zerlegung von $\mathbb{R}^4$ in invariante Unterräume an sowie eine zu A bzw. B ähnliche Matrix in Blockform.

$$(*)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (*)\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 & -2 \\ -3 & 6 & -20 & -7 \\ 0 & 2 & -10 & -4 \\ -3 & -3 & 22 & 9 \end{pmatrix}$$

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 06.06.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18