Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 16.05.2018
Aufgabenblatt 6

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
   (i) Seien W_1 und W_2 Unterräume von V mit $W_1 \subseteq W_2$. Zeigen Sie, dass dann $(W_2)^\circ \subseteq (W_1)^\circ$.
   (ii) Seien U_1 und U_2 Unterräume von V. Zeigen Sie, dass $(U_1+U_2)^\circ = (U_1)^\circ \cap (U_2)^\circ$. Gilt auch $(U_1 \cap U_2)^\circ = (U_1)^\circ + (U_2)^\circ$? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (iii) Sei U ein Unterraum von V. Finden Sie einen Isomorphismus von Vektorräumen zwischen $(V/U)^*$ und U°.
   (iv) Sei $V = U_1 \oplus U_2$ für Unterräume U_1 und U_2 von V. Gilt dann die Gleichung $V^* = (U_1)^\circ \oplus (U_2)^\circ$? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. $(*)$ Wir betrachten $V := \mathbb{C}^3$, die kanonische Abbildung $\iota : V \longrightarrow (V^*)^*$ und $W := \{f \in V^*\colon f(x,0,-x) = 2f(0,y,0), \forall x,y\}$. Zeigen Sie, dass W ein $\mathbb{C}$-Unterraum von V^* ist. Finden Sie einen Unterraum $U \subseteq V$ und eine Basis von U, sodass $\iota(U) = W^\circ$.
3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ und $v \in \mathbb{K}^n$, sodass die $n+1$ Vektoren $v, Av, A^2v, \ldots, A^n v$ linear unabhängig sind.
   (ii) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ mit reellen Einträgen und einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist diagonalisierbar.
   (iii) Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(7 \times 7, \mathbb{Q})$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(x) = -x^7 + 2014x^5 + 1990x^3 + 1974x + 1954$ ist invertierbar.
   (iv) $(*)$ Für $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit charakteristischen Polynomen $\chi_A(x) = -x^3 - 2x^2 + x$ und $\chi_B(x) = -x^3 - 7x^2 - x + 1$ gilt: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(AB)) = 1$.
   (v) $(*)$ Für $A \in \mathrm{Mat}(11 \times 11, \mathbb{C})$ mit ausschließlich ganzzahligen Eigenwerten und charakteristischem Polynom $\chi_A(x) = \sum_{i=0}^{11} a_i x^i$ gilt: Wenn $a_0 = -1$, dann ist $a_{10} \in \mathbb{Z}$ mit $a_{10} < 10$.
4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit reellen Einträgen und sei $A^{\mathrm{t}} = A$.
   (i) $(*)$ Sind alle Eigenwerte von A reelle Zahlen? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (ii) $(*)$ Seien $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A bezüglich der Eigenwerte λ und μ. Nehmen Sie an, dass $\lambda \neq \mu$. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^n v_i w_i = 0$.
5. Sei $f : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung gegeben durch $f(\sum_{j=0}^2 a_j x^j) = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_0)x + (a_0 + a_1)x^2$.
   (i) Bestimmen Sie die Eigenvektoren von f.
   (ii) Falls möglich, finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[x]_2$, sodass die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ eine Diagonalmatrix ist.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 30.05.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18