Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 09.05.2018
Aufgabenblatt 5

Aufgaben zur Vorlesung: Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Finden Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und berechnen Sie A^{27}.
2. Zeigen Sie, dass es keine Abbildung $m : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, sodass die folgenden Bedingungen gelten:
   - $m((a,0,0),(b,0,0)) = (ab,0,0)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$;
   - $m(av, w) = am(v, w) = m(v, aw)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$ und $a \in \mathbb{R}$;
   - $\mathbb{R}^3$ ist ein Körper bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation m.
3. $(*)$ Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $\phi : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und $\chi_\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$ das charakteristische Polynom zu ϕ. Zeigen Sie, dass $\lambda_n = (-1)^n, \lambda_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{Spur}(\phi)$ und $\lambda_0 = \det(\phi)$. (Die Spur einer Matrix wurde in Aufgabe 5 auf Blatt 1 definiert. Die Spur einer linearen Abbildung ist die Spur einer darstellenden Matrix dieser Abbildung bezüglich einer fest gewählten Basis.)
4. Nutzen Sie den euklidischen Algorithmus zur Berechnung der folgenden Werte.
   (i) $(*)$ $\mathrm{ggT}(f, g)$ mit $f = x^3 - 2x^2 - x + 2$ und $g = x^3 - 4x^2 + 3x$ in $\mathbb{R}[x]$;
   (ii) $(*)$ $[23]^{-1}$ und $[42]^{-1}$ in $(\mathbb{Z}/73\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$.
5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ eine reelle Matrix mit $a_{12} = a_{21}$. Dann hat A ausschließlich Eigenwerte in $\mathbb{R}$.
   (ii) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q})$ mit $AB = BA$. Dann haben A und B die gleichen Eigenvektoren.
   (iii) Seien V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\phi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ in $\mathbb{C}[x]$ ein Polynom. Wenn λ ein Eigenwert von ϕ ist, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(\phi) = a_0 \,\mathrm{id}_V + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi^i$.
   (iv) Sei $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom $x^2 - 1$. Dann gilt $\Psi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
   (v) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren $(1,1,1)$ und $(1,0,1)$ erzeugte Unterraum. Dann wird der orthogonale Raum U° von der Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x,y,z) \mapsto x - z$ erzeugt.
6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei V der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Sei $y \in \mathbb{R}$ und $f_y : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung, die ein Polynom $p(x)$ auf $p(y)$ abbildet und $g_y : V \longrightarrow V$ die Abbildung, die ein Polynom $p(x)$ auf $p(x - y)$ abbildet. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen.
   (i) $(*)$ Wenn $y_0, ..., y_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen sind, dann bilden die Vektoren $f_{y_0}, ..., f_{y_n}$ eine Basis des Dualraumes V^*.
   (ii) $(*)$ Es gilt $(g_{y_1})^*(f_{y_2}) = f_{y_2 - y_1}$ für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, wobei $(g_{y_1})^* : V^* \longrightarrow V^*$ die duale Abbildung zu g_{y_1} beschreibt.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 16.05.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18