Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 02.05.2018
Aufgabenblatt 4

**Aufgaben zur Vorlesung:**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2**

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Für $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{Q})$ mit $n \geq 2$ und $a_{ij} = 1$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt: Die Werte $n$ und $0$ sind Eigenwerte von $A$.
   (ii) Jede Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2,\mathbb{C})$ mit $a_{12} = 0$ und $a_{11}, a_{22} \neq 0$ ist diagonalisierbar.
   (iii) $(*)$ Wenn null der einzige Eigenwert einer linearen Abbildung $f : V \longrightarrow V$ ist, dann gilt $f(v) = 0$ für alle $v \in V$.
   (iv) $(*)$ Für $A \in \mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$ mit $A^t = A$ gilt: Wenn $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ und $w$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\mu$ ist, dann gilt $\lambda = \mu$ oder $v^t w = 0$.
   (v) $(*)$ Wenn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann gilt $\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}\right) = 0$ genau dann, wenn $a = b = c = d = 0$.
2. $(*)$ Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $N \in \mathrm{Mat}(n \times n,\mathbb{K})$ mit $N^{k+1} = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $E_n - \lambda N$ invertierbar ist für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ und bestimmen Sie $(E_n - \lambda N)^{-1}$. Was bedeutet dies für die Eigenwerte von $N$?
3. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden reellen Matrizen und geben Sie, falls möglich, eine invertierbare Matrix $P$ an, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist:

   (i) $(*)$ $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Wie verändert sich das Ergebnis, wenn wir annehmen, dass $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3,\mathbb{F}_3)$?
4. Wir betrachten die lineare Abbildung $T : \mathrm{Mat}(n \times n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n \times n,\mathbb{R})$ gegeben durch $A \mapsto A^t$. Zeigen Sie, dass $T$ genau zwei unterschiedliche Eigenwerte hat. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren von $T$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$ bilden.
5. Mit $\mathrm{Adj}(A)$ bezeichnen wir die komplementäre oder adjunkte Matrix einer Matrix $A$. Seien nun $\mathbb{K}$ ein Körper, $A, B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass:
   (i) $\mathrm{Adj}(AB) = \mathrm{Adj}(B)\,\mathrm{Adj}(A)$ und $\mathrm{Adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\,\mathrm{Adj}(A)$;
   (ii) $\det(\mathrm{Adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$ und, wenn $n \geq 2$, $\mathrm{Adj}(\mathrm{Adj}(A)) = (\det(A))^{n-2}A$.

*Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 09.05.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:*
*www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18*