Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 25.04.2018
Aufgabenblatt 3

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ auf folgende Weisen:
   (i) $(*)$ mit Hilfe der Regel von Sarrus;
   (ii) $(*)$ mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace;
   (iii) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. (Vorgehen ausführlich begründen!)
2. $(*)$ Sei $z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Determinante der $(n \times n)$-Matrix
$$\begin{pmatrix} z & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & z \end{pmatrix}.$$
3. Seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass gilt
$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le k < l \le n} (a_l - a_k).$$
4. Seien $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^2$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte x und y in $\mathbb{Q}^2$ gegeben ist durch die Menge
$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ 1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$
5. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (i) $(*)$ Wenn n ungerade ist und $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ gilt, dann ist A nicht invertierbar. Gilt die Aussage auch für den Fall, dass n gerade ist?
   (ii) Für die Matrix $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $b_{ij} := (-1)^{i+j} a_{ij}$ gilt: $\det(B) = \det(A)$.
   (iii) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und A invertierbar mit $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt $\det(A) \in \{1, -1\}$ genau dann, wenn alle Einträge der Matrix A^{-1} in $\mathbb{Z}$ liegen.
6. $(*)$ Bestimmen Sie für die folgenden beiden Matrizen jeweils die Eigenwerte und eine Basis der Eigenräume und entscheiden Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind:
$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 7 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 02.05.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18