Modulprüfung zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Bearbeitungszeit: zwei Stunden

In allen Teilen der Klausur sind Begründungen verlangt. Dabei dürfen nur Definitionen, Aussagen und Methoden aus den Vorlesungen Lineare Algebra und Analytische Geometrie I+II aus dem WS 17/18 und dem SoSe 18 (Prof. König) zitiert und ohne weitere Erklärung genutzt werden. Andere Definitionen und Aussagen müssen gegebenenfalls eingeführt bzw. bewiesen werden.

Erster Teil (12 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Punkte gibt es für die korrekte Begründung.

1. *(3 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \Sigma_n$ mit $\sigma(j) \neq j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung, die den Einheitsbasisvektor e_j auf $e_{\sigma(j)}$ abbildet. Dann hat f keinen Eigenwert.

2. *(3 Punkte)* Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, $\iota : V \to V^{**}$ der Auswertungsisomorphismus und $x \in V \setminus \{0\}$. Dann ist $\iota(x) \in V^{**}$ surjektiv.

3. *(3 Punkte)* Sei $n \geq 2$, $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine nilpotente Matrix, sodass $A^{n-1} \neq 0$. Dann gibt es keine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$, sodass $B^2 = A$.

4. *(3 Punkte)* In einem unitären Vektorraum V gilt für alle Elemente $x, y \in V$: $x = y$ genau dann, wenn $||x|| = ||y||$ und $\langle x, x\rangle = \langle x, y\rangle$.

Zweiter Teil (42 Punkte)

5. *(15 Punkte)* Sei $f : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^5$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis gegeben ist durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_f, das Minimalpolynom m_f sowie die Eigenwerte von f und deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.
   (b) Bestimmen Sie eine Jordan-Normalform von A und eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^5$, sodass die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ in Jordan-Normalform ist.

6. *(8 Punkte)* Seien $A, B_{s,t} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{s,t} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & s \\ 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   Entscheiden Sie, welche Matrizen $B_{s,t}$ zueinander ähnlich und welche zu A ähnlich sind.

7. *(5 Punkte)* Sei A eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen, sodass $\chi_A = (x-1)^4(x-5)^4$ und $m_A = (x-1)^2(x-5)^2$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordan-Normalformen von A.

8. *(9 Punkte)* Sei $X = \{1, \dots, n\}$ und $V = \mathrm{Fun}(X, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Sei $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $s(f,g) = \sum_{x \in X} f(x)g(x)$ für $f, g \in V$.
   (a) Zeigen Sie, dass s eine symmetrische Bilinearform auf V definiert. (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist durch Addition und Multiplikation mit Skalaren im Bild.)
   (b) Geben Sie eine Basis von V an und bestimmen Sie die darstellende Matrix von s bezüglich dieser Basis.
   (c) Ist s ein Skalarprodukt auf V?

9. *(5 Punkte)* Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraumes U von $\mathbb{R}^4$, der aufgespannt wird von den Vektoren
$$u_1 = (1,2,2,4)^t, u_2 = (4,4,5,7)^t \text{ und } u_3 = (5,6,7,11)^t.$$

Dritter Teil (26 Punkte)

10. *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Koeffizienten von a^6 und b^6 in $\det(A)$, wobei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(6 \times 6, \mathbb{R}).$$
Eine vollständige Berechnung von $\det(A)$ ist nicht verlangt.

11. *(6 Punkte)* Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\mathrm{Rang}(f) = 1$. Zeigen Sie: Entweder gilt $f \circ f = 0$ oder f ist diagonalisierbar.

12. *(5 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.
   (a) Formulieren Sie für die Matrix A den Satz von Cayley-Hamilton.
   (b) Nehmen Sie an, dass A ein Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ ist. Zeigen Sie, dass A den Satz von Cayley-Hamilton erfüllt.

13. *(6 Punkte)* Sei A ein affiner Raum über einem Körper $\mathbb{K}$ bezüglich eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V und seien $p+U$ und $q+W$ affine Teilräume. Zeigen Sie, dass sich $p+U$ und $q+W$ genau dann schneiden, wenn der Verbindungsvektor $\overrightarrow{pq}$ ein Element von $U+W$ ist.

14. *(5 Punkte)* Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und f ein orthogonaler Endomorphismus. Zeigen Sie, dass f selbstadjungiert ist genau dann, wenn $f \circ f = \mathrm{id}$ gilt.