KURZSKRIPT ZUR VORLESUNG LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE II IM SOMMERSEMESTER 2018

8. Determinanten

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X = \{1, \dots, n\}$. Eine *Permutation* von X ist eine bijektive Abbildung $X \longrightarrow X$.

Definition 8.1. Die Menge der Permutationen von $\{1, \dots, , n\}$ wird mit Σ_n bezeichnet und heißt *symmetrische Gruppe*. Σ_n ist tatsächlich eine Gruppe mit Komposition als Verknüpfung.

Definition 8.2. Eine Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ heißt *Zyklus* oder *Zykel* (oder *zyklisch*) der *Länge l* genau dann, wenn $\exists \{a_1, \dots, a_l\} \subset \{1, \dots, n\}$ mit $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = a_3, \dots, \sigma(a_{l-1}) = a_l, \sigma(a_l) = a_1$ und $\sigma(b) = b \, \forall b \notin \{a_1, \dots, a_l\}$. Zyklische Permutationen der Länge 2 heißen *Transpositionen.*

Proposition 8.3.

(a) *Jedes $\sigma \in \Sigma_n$ ist ein Produkt von disjunkten Zyklen.*
(b) *Jedes $\sigma \in \Sigma_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.*

Die Anzahl der vorkommenden Transpositionen ist jedoch nicht eindeutig bestimmt.

Theorem 8.4. *Sei $\sigma \in \Sigma_n$ und $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k = \tau_1 \dots \tau_l$ jeweils ein Produkt von Transpositionen. Dann gilt $k \equiv l \bmod 2$.*

Wenn k gerade ist, nennen wir σ eine *gerade* Permutation, sonst eine *ungerade* Permutation.

Definition 8.5. Sei $\sigma \in \Sigma_n$. Ein Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ heißt *Fehlstand* (oder *Inversion*) von σ. Das *Vorzeichen* (oder *Signum*) von σ ist $\operatorname{sgn} \sigma := (-1)^{\# \text{ Fehlstände von } \sigma}$.

Proposition 8.6. $\forall \sigma, \tau \in \Sigma_n : \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma)$.

Definition 8.7. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$. Dann heißt H *Untergruppe* von G genau dann, wenn H eine Gruppe ist und die Verknüpfung $H \times H \to H$ die Einschränkung der Verknüpfung $G \times G \to G$ ist.

Proposition 8.8. *(Untergruppenkriterium) Sei G eine Gruppe und $H \subset G$. Dann ist H eine Untergruppe von G genau dann, wenn $H \neq \varnothing$ und $\forall a, b \in H : a \cdot b \in H$ und $a^{-1} \in H$. Wir schreiben dann $H < G$.*

Wir nennen die Untergruppe $A_n := \{\sigma \in \Sigma_n : \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$ von Σ_n die *alternierende Gruppe.*

Definition 8.9. Seien G und H Gruppen und $\varphi : G \longrightarrow H$ eine Abbildung. Dann heißt φ *Gruppenhomomorphismus* genau dann, wenn $\varphi(e_G) = e_H$ und $\forall g_1, g_2 \in G$ gilt $\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$ Wenn φ zudem bijektiv ist, heißt φ *(Gruppen-)Isomorphismus.*

Definition 8.10. Sei $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Der *Kern* von φ ist die Menge $\operatorname{Kern}(\varphi) := \{g \in G : \varphi(g) = e_H\}$.

Proposition 8.11. *Sei $H < G$. Die Relation $a \sim b :\Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ definiert eine Äquivalenzrelation auf G. Die Äquivalenzklasse von $a \in G$ ist $aH := \{ah : h \in H\}$ und es gilt $|aH| = |eH| = |H|$.*

Definition 8.12. Sei $H < G$. Die Menge aH heißt *Linksnebenklasse* von a modulo H, Ha heißt *Rechtsnebenklasse*. Die Anzahl der verschiedenen Linksnebenklassen (in der disjunkten Zerlegung $G = \bigcup aH$) heißt der *Index* von H in G und wird mit $[G : H]$ bezeichnet. Die Menge der Links- bzw. Rechtsnebenklassen wird mit G/H bzw. $H \backslash G$ bezeichnet.

Korollar 8.13. *(Satz von Lagrange) Sei G eine endliche Gruppe und $H < G$. Dann gilt $|G| = |H| \cdot [G : H]$. Insbesondere ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.*

Proposition 8.14. *Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe. Dann sind äquivalent:*

- *G/H ist eine Gruppe mit Verknüpfung $aH * bH := abH$;*
- *$\forall g \in G\, \forall h \in H : g^{-1}hg \in H$;*
- *$\forall g \in G : gH = Hg$.*

Definition 8.15. Wenn die Bedingungen in Proposition 8.14 erfüllt sind, heißt H eine *normale Untergruppe* (oder ein *Normalteiler*) von G. Wir schreiben dann $H \trianglelefteq G$.

Theorem 8.16. *(Homomorphiesatz) Sei $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Homomorphismus von Gruppen und $N = \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann sind $\pi : G \longrightarrow G/N$ mit $g \mapsto gN$ und $\iota : G/N \longrightarrow H$ mit $gN \mapsto \varphi(g)$ Gruppenhomomorphismen, π ist surjektiv, ι ist injektiv und $\varphi = \iota \circ \pi$. Außerdem ist die Abbildung $\tau : G/N \longrightarrow \varphi(G)$ mit $gN \mapsto \varphi(g)$ ein Isomorphismus von Gruppen.*

Definition 8.17. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n$ und $D : V^n \longrightarrow K$ eine Funktion. Dann heißt D *Determinantenfunktion* auf V :$\Leftrightarrow$

(1) D ist *multilinear*, d.h. linear in jedem Eintrag:

$$\forall u \in V, \lambda \in K, i = 1, \dots, n : D(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + u, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

$$= \lambda D(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + D(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

(2) Falls $\exists\, i \neq j$ mit $v_i = v_j$, dann ist $D(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Proposition 8.18. *Sei $D : V^n \longrightarrow K$ eine Determinantenfunktion. Dann gilt für beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$:*

(a) *$\forall \sigma \in \Sigma_n : D(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) D(v_1, \dots, v_n)$*

(b) *D ist schiefsymmetrisch, d.h. für $i < j$ gilt:*

$$D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -D(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

(c) *Falls die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind, ist $D(v_1, \dots, v_n) = 0$.*

Proposition 8.19.

(a) *Sei D eine Determinantenfunktion, $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} v_j$ für $1 \leq i \leq n$. Dann ist*

$$D(x_1, \dots, x_n) = D(v_1, \dots, v_n) \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)}.$$

D ist durch $D(v_1, \dots, v_n)$ bestimmt.
Falls $D \neq 0$ (als Funktion), dann ist $D(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

(b) *Seien D_1, D_2 Determinantenfunktionen und $D_1 \neq 0$. Dann $\exists \lambda \in K : D_2 = \lambda D_1$.*

Theorem 8.20. *Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Dann existiert eine Determinantenfunktion $D \neq 0$ auf V, und jede Determinantenfunktion auf V ist von der Form λD für $\lambda \in K$.*

Korollar 8.21. *Sei $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann existiert genau ein Skalar $\lambda \in K$, sodass für alle Determinantenfunktionen D und alle $x_1, \dots, x_n \in V$ gilt: $D(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \lambda D(x_1, \dots, x_n)$. Die Zahl λ heißt Determinante von f. Wir schreiben $\det(f)$.*

(a) *Die Abbildung f ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$.*

(b) *Für lineare Abbildungen $f, g : V \longrightarrow V$ gilt: $\det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f)$.*

Sei $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{Mat}(n\times n, K)$ eine Matrix. Wir definieren die Matrix

$$A_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Sei $b_{ij} := \det A_{ji}$ und $B := (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n\times n, K)$. Die Matrix B heißt die zu A *komplementäre oder adjunkte Matrix*. Sei weiterhin $A'_{ij} \in \mathrm{Mat}((n-1)\times(n-1), K)$ jene Matrix, die aus A durch Streichen der Zeile i und der Spalte j entsteht.

Lemma 8.22. *Es gilt* $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}$.

Theorem 8.23. *Sei* $A \in \mathrm{Mat}(n\times n, K)$ *und* B *die zu* A *komplementäre Matrix. Dann gilt* $A\cdot B = B\cdot A = \det A \cdot E_n$ *mit* $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. *Falls* $\det A \neq 0$, *d.h.* A *ist invertierbar, dann gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot B.$$

Korollar 8.24. *Die Abbildung* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *mit* $A \mapsto A^{-1}$ *ist, als Funktion in den* n^2 *Einträgen der Matrix, beliebig oft stetig differenzierbar (analog für* $K = \mathbb{C}$*).*

Korollar 8.25. *(Entwicklungssatz von Laplace)*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \quad \textit{(Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \quad \textit{(Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte)} \end{aligned}$$

9. Endomorphismen, Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 9.1. Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V. Ein $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* $:\Leftrightarrow \exists v_0 \in V - \{0\} : \varphi(v_0) = \lambda v_0$. Ein solches $v_0 \neq 0$ heißt *Eigenvektor* von φ zum Eigenwert λ.

Proposition 9.2. *Sei* $\dim V < \infty$ *und* $\varphi : V \longrightarrow V$ *wie zuvor. Dann existiert eine Basis von* V*, die aus Eigenvektoren von* φ *besteht, genau dann, wenn eine Basis von* V *existiert, bezüglich derer* φ *eine Diagonalmatrix als darstellende Matrix hat. Die Abbildung* φ *heißt dann* diagonalisierbar *und jede Matrix, die als darstellende Matrix von* φ *auftreten kann, heißt ebenfalls* diagonalisierbar.

Proposition 9.3. *Seien* $v_1, \dots, v_l \in V$ *Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten* $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in K$. *Dann sind die Vektoren* $v_1, \dots, v_l$ *linear unabhängig.*

Proposition 9.4. *Sei* $\varphi : V \longrightarrow V$ *eine lineare Abbildung. Ein Skalar* $\lambda \in K$ *ist genau dann ein Eigenwert von* φ*, wenn* $\det(\varphi - \lambda \operatorname{Id_V}) = 0$.

Proposition 9.5. *Sei* $\varphi : V \longrightarrow V$ *eine lineare Abbildung mit Eigenwert* $\lambda \in K$. *Dann ist* $E(\lambda) := \{x \in V : \varphi(x) = \lambda x\} = \{$*Eigenvektoren zu* $\lambda\} \cup \{0\}$ *ein Untervektorraum von* V*, der* Eigenraum *von* φ *zu* λ *genannt wird.*

Definition 9.6. Sei $\dim V = n$, $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ und A eine darstellende Matrix von φ. Das Polynom $\chi_\varphi(x) = \chi_A(x) = \chi(x) := \det(A - xE_n)$ heißt *charakteristisches Polynom* von φ und von A.

Definition 9.7. Seien $f, g \in K[x]$ Polynome. Wir sagen f *teilt* g oder f ist ein *Teiler* von g $:\Leftrightarrow \exists h \in K[x] : g = fh$. Wir schreiben $f \mid g$. Das Polynom f ist ein *echter Teiler* von g genau dann, wenn $f \mid g$ und $0 < \deg(f) < \deg(g)$. Das Polynom g ist *irreduzibel* (oder *prim*) genau dann, wenn $\deg(g) > 0$ und g keine echten Teiler hat.

Lemma 9.8.

(a) *Lineare Polynome* $g(x) = ax + b$ *in* $K[x]$ *sind irreduzibel.*
(b) *Es gilt folgende Kürzungsregel:* $fh_1 = fh_2$ *und* $f \neq 0 \Rightarrow h_1 = h_2$.
(c) $f \mid g$ *und* $g \mid h \Rightarrow f \mid h$.
(d) $f \mid g$ *und* $f \mid h \Rightarrow f \mid (g + h)$.

Theorem 9.9. *Seien* $f, g \in K[x]$ *mit* $g \neq 0$. *Dann existieren* $q, r \in K[x]$ *mit* $\deg(r) < \deg(g)$*, sodass* $f = qg + r$. *Die Polynome* q *und* r *sind eindeutig bestimmt.*

Korollar 9.10. *Sei* $f \in K[x]$ *mit* $f \neq 0$ *und* $a \in K$ *eine Nullstelle von* $f(x)$*, d.h.* $f(a) = 0$. *Dann existiert* $q \in K[x]$*, sodass* $f(x) = (x - a) \cdot q(x)$. *Falls* $\deg(f) = n$*, so hat* f *höchstens* n *Nullstellen.*

Theorem 9.11. *(Satz von Cayley und Hamilton) Sei* $\dim V = n$ *und* $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ *gegeben durch eine darstellende Matrix* A *(bezüglich irgendeiner Basis* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *von* V*). Sei* $\chi_A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ *das zugehörige charakteristische Polynom. Dann gilt:*

$$a_n \varphi^n + a_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + a_1 \varphi + a_0 \operatorname{Id}_V = 0$$

und

$$a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n = 0.$$

Anschaulich bedeutet dies $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ *und* $\chi_A(A) = 0$.

10. Dualräume

Definition 10.1. Sei V ein K-Vektorraum. Der Vektorraum $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der linearen Abbildungen von V nach K heißt der zu V *duale Vektorraum* oder der *Dualraum* von V. Die Elemente $\varphi \in V^*$ heißen *Linearformen* oder *lineare Funktionale.*

Proposition 10.2. *Sei* $\dim V = n$ *und* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *eine Basis von* V*. Dann hat* V^* *eine Basis* $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ *mit* $v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & sonst \end{cases}$ *. Diese Basis heißt die zu* $\{v_1, \dots, v_n\}$ duale Basis.

Proposition 10.3. *Sei* $\dim V < \infty$ *und* $v_0, v_1, v_2 \in V$*.*

(a) *Falls* $v_0 \neq 0 \; \exists \varphi \in V^*$ *mit* $\varphi(v_0) \neq 0$*.*
(b) *Falls* $v_1 \neq v_2 \; \exists \varphi \in V^*$ *mit* $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$*.*

Definition 10.4. Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißt der K-Vektorraum $V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$ der *Bidualraum* von V.

Für $v \in V$ definieren wir die lineare Abbildung $\iota_v : V^* \longrightarrow K$ mit $\iota_v(\varphi) = \varphi(v)$.

Theorem 10.5. *Die Abbildung* $\iota : V \longrightarrow V^{**}$ *mit* $\iota(v) = \iota_v$ *ist eine injektive lineare Abbildung. Wenn* $\dim V < \infty$*, ist* ι *ein Isomorphismus zwischen* V *und* V^{**}*.*

Definition 10.6. Sei V ein K-Vektorraum und W ein Unterraum von V. Dann heißt $W^\circ := \{\varphi \in V^* : \varphi(w) = 0 \; \forall w \in W\} \subset V^*$ der zu W *orthogonale Raum.*

Proposition 10.7. *Sei* W *ein Unterraum von* V*,* $\dim V < \infty$*,* $\{w_1, \dots, w_l\}$ *eine Basis von* W *und* $\{w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_p\}$ *eine Basis von* V*. Dann ist* $\dim W^\circ = p$*,* $\{v_1^*, \dots, v_p^*\}$ *ist eine Basis von* W° *und es gilt die Dimensionsformel:* $\dim W + \dim W^\circ = \dim V$*.*

Korollar 10.8. *Sei* $\dim V < \infty$ *und* W *ein Unterraum von* V*. Dann ist die Einschränkung von* $\iota : V \longrightarrow V^{**}$ *auf* W *ein Isomorphismus* $\iota : W \longrightarrow (W^\circ)^\circ$*.*

Korollar 10.9. *Sei* $\dim V < \infty$*,* W *ein Unterraum von* V *und* $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$*. Dann sind äquivalent:*

- $W = \{v \in V : \varphi_1(v) = \varphi_2(v) = \cdots = \varphi_r(v) = 0\}$*, das heißt,* W *ist der Lösungsraum des homogenen LGS* $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_r(x) = 0$*.*
- $W^\circ = [\varphi_1, \dots, \varphi_r]$*, das heißt, die Linearformen* $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ *spannen den zu* W *orthogonalen Unterraum in* V^* *auf. Die kleinste Anzahl der zur Beschreibung von* W *erforderlichen Gleichungen ist* $s := \dim V - \dim W = \dim W^\circ$*.*

Definition 10.10. Seien V und W Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Die zu f *duale Abbildung* $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ ist definiert durch $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$ für $\varphi \in W^*$, d.h.,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "{\varphi \circ f = f^*(\varphi)}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowright"] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Proposition 10.11. *Wenn die lineare Abbildung* $f : V \longrightarrow W$ *durch die Matrix* A *gegeben ist, dann ist* $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ *bezüglich der dualen Basen durch die Matrix* A^t *gegeben.*

Korollar 10.12. *Seien* V *und* W *endlich dimensionale* K*-Vektorräume. Dann liefert die Zuordnung* $f \mapsto f^*$ *einen Vektorraum-Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*).$$

Proposition 10.13. *Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt* $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)^\circ$.

Korollar 10.14. *Sei $A \in Mat(p \times q, K)$ eine Matrix. Dann stimmen Zeilenrang und Spaltenrang von A überein.*

11. Normalformen von Endomorphismen I: Diagonalisieren, Trigonalisieren und Hauptraumzerlegung

Definition 11.1. Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V < \infty$. Sei $\varphi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und λ ein Eigenwert von φ. Sei $\chi_\varphi(x) = (x-\lambda)^\mu \cdot \psi(x)$ das charakteristische Polynom zu φ mit $\psi(\lambda) \neq 0$. Dann heißt μ die *Vielfachheit* der Nullstelle λ von $\chi_\varphi(x)$ und die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts λ. Wir schreiben $\mu = \mu(\chi_\varphi, \lambda)$. Die Dimension des Eigenraums $E(\lambda) = E(\varphi, \lambda)$ heißt *geometrische Vielfachheit* von λ.

Lemma 11.2. *Sei* $\dim V < \infty$ *und sei* $\varphi : V \longrightarrow V$ *eine lineare Abbildung mit Eigenwert* λ. *Dann gilt* $\dim E(\varphi, \lambda) \leq \mu(\chi_\varphi, \lambda)$.

Theorem 11.3. *Sei* $\dim V < \infty$ *und sei* $\varphi : V \longrightarrow V$ *eine lineare Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- φ *ist diagonalisierbar.*
- $\chi_\varphi(x)$ *ist ein Produkt von Linearfaktoren und für jeden Eigenwert* λ *stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.*
- $V = E(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\varphi, \lambda_n)$, *wobei* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *die paarweise verschiedenen Eigenwerte von* φ *sind.*

Definition 11.4. Sei $\dim V < \infty$ und $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$. Sei A eine darstellende Matrix von φ. Dann heißen φ und A *trigonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich derer φ eine obere Dreiecksmatrix als darstellende Matrix hat, d.h. es gibt eine Basistransformation T, sodass TAT^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist, d.h.

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} * & \ldots & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & * & & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Theorem 11.5. *Sei* $\dim V < \infty$. *Dann ist* $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ *genau dann trigonalisierbar, wenn sein charakteristisches Polynom* χ_φ *in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt. Insbesondere ist über* $\mathbb{C}$ *jeder Endomorphismus trigonalisierbar.*

Theorem 11.6. *Sei* $A \in \operatorname{Mat}(n \times n, K)$. *Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom* $m_A \neq 0$ *mit kleinstem Grad, sodass* $m_A(A) = 0$. *Es gilt*

$$P(A) := \{f(x) \in K[x] \mid f(A) = 0\} = \{m_A(x)g(x) \mid g(x) \in K[x]\} = \{h(x) \in K[x] \mid m_A(x)|h(x)\}.$$

Analoge Aussagen gelten für $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ *mit* $\dim V = n$. *Das Polynom* m_A *(bzw.* m_φ*) heißt das* Minimalpolynom *von* A *(bzw. von* φ*). Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom.*

Theorem 11.7. *Sei* $\dim V = n$ *und* $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$. *Dann sind äquivalent:*

- φ *ist diagonalisierbar.*
- m_φ *ist ein Produkt von Linearfaktoren und hat keine mehrfachen Nullstellen.*

In diesem Fall ist $m_\varphi(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_l)$, *wobei* $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ *genau die (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von* φ *sind.*

Proposition 11.8. *Sei* $\dim V < \infty$ *und* $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$. *Dann sind die Nullstellen von* m_φ *genau die Eigenwerte von* φ.

Theorem 11.9. *(Zerlegungssatz) Sei* $\dim V < \infty$ *und* $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. *Sei* $m_\varphi(x) = f(x)g(x)$ *mit* $ggT(f,g) = 1$, *d.h.* f *und* g *sind teilerfremd. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Kern}(f(\varphi)) = \mathrm{Im}(g(\varphi))$;
(b) $\mathrm{Im}(f(\varphi)) = \mathrm{Kern}(g(\varphi))$;
(c) $V = \mathrm{Im}(f(\varphi)) \oplus \mathrm{Im}(g(\varphi)) = \mathrm{Kern}(f(\varphi)) \oplus \mathrm{Kern}(g(\varphi)) = \mathrm{Kern}(g(\varphi)) \oplus \mathrm{Im}(g(\varphi)) = \mathrm{Kern}(f(\varphi)) \oplus \mathrm{Im}(f(\varphi))$.

Definition 11.10. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $U \subset V$ ein Unterraum. Dann heißt U *φ-invariant* (oder *φ-invarianter Unterraum*), wenn $\varphi(U) \subset U$.

Falls $V = U \oplus W$ eine direkte Summe von φ-invarianten Unterräumen ist, dann gibt es eine darstellende Matrix von φ in Blockform, d.h. von der Form

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Lemma 11.11. *Sei* $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ *und* $f \in K[x]$. *Dann ist der Unterraum* $U := \mathrm{Kern}\, f(\varphi)$ *φ-invariant.*

Korollar 11.12. *Sei* $\dim V < \infty$ *und* $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. *Dann ist die Zerlegung*

$$V = \mathrm{Kern}(f(\varphi)) \oplus \mathrm{Kern}(g(\varphi))$$

aus dem Zerlegungssatz (mit $m_\varphi = fg$ *und* $ggT(f,g) = 1$*) eine direkte Summe von φ-invarianten Unterräumen. Bezüglich einer Basis von V, die aus Basen der beiden Summanden besteht, hat φ eine darstellende Matrix in Blockform.*

Definition 11.13. Sei $\dim V < \infty$ und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ sowie $\lambda \in K$. Der *Hauptraum* zu λ ist definiert als $H(\lambda) := \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathrm{Kern}((\varphi - \lambda \,\mathrm{Id}_V)^r)$. Vektoren $v \neq 0$ in $H(\lambda)$ heißen *Hauptvektoren* oder *verallgemeinerte Eigenvektoren.*

Proposition 11.14. *Sei* $\dim V < \infty$ *und* $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ *sowie* $\lambda \in K$. *Dann gilt für* $r = \mu(\chi_\varphi, \lambda)$*:*

$$H(\lambda) = \mathrm{Kern}((\varphi - \lambda \,\mathrm{Id}_V)^r).$$

Theorem 11.15. *(Hauptraumzerlegung) Sei* $\dim V < \infty$ *und* $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, *sodass* χ_φ *oder* m_φ *ein Produkt von Linearfaktoren ist. Seien* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *die verschiedenen Eigenwerte von* φ. *Dann gilt* $V = H(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus H(\lambda_r)$ *und dies ist eine Zerlegung in φ-invariante Unterräume.*

12. Normalformen von Endomorphismen II: Nilpotente Endomorphismen

Definition 12.1. Sei $\dim V < \infty$ und $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$. Dann heißt φ *nilpotent von Ordnung a*, wenn $m_\varphi(x) = x^a$ für $a \in \mathbb{N}$. Analog definieren wir nilpotente Matrizen.

Lemma 12.2. *Sei $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ nilpotent von Ordnung a. Dann ist $a \leq \dim V$.*

Definition 12.3. Zwei Unterräume $U \subset V$ und $W \subset V^*$ heißen *dual zueinander*, wenn

$$U^\circ \cap W = \{0\} \text{ und } W^\circ \cap \iota(U) = \{0\},$$

wobei ι der Isomorphismus $V \longrightarrow V^{**}$ aus Kapitel 10 ist.

Lemma 12.4. *Sei $\dim V < \infty$ und seien $U \subset V$ und $W \subset V^*$ dual zueinander. Dann gilt*

$$\dim U = \dim W.$$

Proposition 12.5. *Sei $\dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{End}_K(V)$. Dann gilt:*

(a) *f und f^* haben dasselbe Minimalpolynom.*
(b) *Wenn $U \subset V$ ein f-invarianter Unterraum ist, d.h. $f(U) \subset U$, dann ist $U^\circ \subset V^*$ ein f^*-invarianter Unterraum, d.h. $f^*(U^\circ) \subset U^\circ$.*
(c) *Wenn $V = U_1 \oplus U_2$ eine Blockzerlegung in f-invariante Unterräume ist, dann ist auch $V^* = U_1^\circ \oplus U_2^\circ$ eine Blockzerlegung in f^*-invariante Unterräume.*
(d) *Seien $U \subset V$ und $W \subset V^*$ dual zueinander mit U f-invariant und W f^*-invariant. Dann ist $U^\circ f^*$-invariant und W° ist $\iota(f)$-invariant und $V = U \oplus \iota^{-1}(W^\circ)$ und $V^* = W \oplus U^\circ$ sind Blockzerlegungen.*

Theorem 12.6. *Sei $\dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{End}_K(V)$ nilpotent von Ordnung a. Dann existiert eine Zerlegung von V in eine direkte Summe unzerlegbarer f-invarianter Unterräume mit folgenden Eigenschaften:*

(1) Mindestens einer dieser Unterräume hat die Dimension a.
(2) Jeder f-invariante Summand hat eine Basis, bezüglich derer f die folgende darstellende Matrix hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Normalformen von Endomorphismen III: Jordan-Normalform und rationale Normalform

Theorem 13.1. *(Jordan-Normalform) Sei* $\dim V < \infty$ *und* $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$, *sodass* $m_\varphi(x)$ *ein Produkt von Linearfaktoren ist. Dann existiert eine Zerlegung von* V *in* φ*-invariante Unterräume und eine mit der Zerlegung kompatible Basis, sodass die zugehörige darstellende Matrix von* φ *in Blockform ist, mit Blöcken der Form*

$$J(\lambda, l) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & & & & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei λ *ein Eigenwert von* φ *ist.*

Bemerkung. *Seien* $b_1, \ldots, b_l \in V$ *die Vektoren einer Basis zu einem solchen Jordanblock* $J(\lambda, l)$. *Dann gilt:*

$\varphi(b_1) = \lambda b_1$, *d.h.* b_1 *ist ein Eigenvektor zum Eigenwert* λ *und somit* $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(b_1) = 0$.
$\varphi(b_2) = \lambda b_2 + b_1$, *d.h.* $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(b_2) = b_1$ *und* $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^2(b_2) = 0$.
$\varphi(b_3) = \lambda b_3 + b_2$, *d.h.* $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(b_3) = b_2$ *und* $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^3(b_3) = 0$.
$\vdots \qquad\qquad \vdots$
$\varphi(b_l) = \lambda b_l + b_{l-1}$, *d.h.* $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(b_l) = b_{l-1}$ *und* $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^l(b_l) = 0$.

Sei $U := [\{b_1, \ldots, b_l\}] \subset V$. *Dann gilt für alle* $x \in U : (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^l(x) = 0$, *d.h. die Abbildung* $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ *ist nilpotent.*
Ordnet man die Basisvektoren umgekehrt an, erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & & & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Vorgehen, um die Jordan-Normalform inklusive zugehöriger Basis zu bestimmen. Gegeben ist $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$.

1. Wähle eine Basis von V und bestimme die darstellende Matrix A von φ bezüglich der gewählten Basis.
2. Bestimme χ_A oder m_A oder beide: das Polynom χ_A durch Berechnung der entsprechenden Determinante und m_A dann als Teiler oder durch Ausprobieren von Linearkombinationen von $E, A, A^2, \ldots$. Verifiziere die Voraussetzung in Theorem 13.1 an m_A (sonst Abbruch bzw. Bestimmung der rationalen Normalform wie in Proposition 13.2).
3. Bestimme die Eigenwerte von φ als Nullstellen von χ_A oder m_A.
4. Bestimme für jeden Eigenwert λ von φ die Dimensionen des Hauptraumes und der nach Ordnung sortierten Unterräume, jeweils durch Anwendung des Gauß-Algorithmus:
   $d_1 := \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E)$
   $d_2 := \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E)^2$
   $\vdots$
   $d_r := \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E)^r = \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E)^{r+1} = \ldots$
   Es gilt:
   $d_1 = \dim E(A, \lambda) = \#$ Blöcke zum Eigenwert λ.
   $d_2 = d_1 + \#$ Blöcke der Größe $l \times l$ mit $l \geq 2$ zum Eigenwert λ.

$$\vdots$$

$d_r = d_{r-1} + \#$ Blöcke der Größe $r \times r$ zum Eigenwert λ.

5. Bestimme induktiv eine Basis, beginnend bei den größten Blöcken:
   Sei $\mathrm{Kern}(A-\lambda E)^l = [v_1, \dots, v_m] \oplus \mathrm{Kern}(A-\lambda E)^{l-1}$. Dann ist
   $$[\{v_1, Av_1, \dots, A^{l-1}v_1\}] = [\{v_1, (A-\lambda E)v_1, \dots, (A-\lambda E)^{l-1}v_1\}].$$
   Als Basis wählen wir die Vektoren $(A-\lambda E)^{l-1}v_1, (A-\lambda E)^{l-2}v_1, \dots, (A-\lambda E)v_1, v_1$. Diese liefern den Jordanblock $J(\lambda, l)$.

Proposition 13.2. *Sei $\dim V < \infty$ und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ sowie $m_\varphi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = f(x)^l$ mit f irreduzibel. Dann existiert $x \in V$ mit $x, \varphi(x), \dots, \varphi^{n-1}(x) \neq 0$. Der Unterraum $U := [\{x, \dots, \varphi^{n-1}(x)\}]$ ist φ-invariant mit Basis $x, \dots, \varphi^{n-1}(x)$. Die Einschränkung $\varphi = \varphi|_U$ hat bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix in rationaler Normalform (oder Frobenius-Form):*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Lemma 13.3. *Sei $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel. Dann ist $p(x)$ entweder linear mit reeller Nullstelle oder ein quadratisches Polynom ohne reelle Nullstelle.*

Wie können wir Lemma 13.3 nutzen, um eine Normalform zu bestimmen?

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit Minimalpolynom $m_\varphi(x)$. Zerfällt $m_\varphi(x)$ in Linearfaktoren, ist die Jordan-Normalform verfügbar. Andernfalls hat das Minimalpolynom nach Anwendung des Zerlegungssatzes einen Faktor der Form $f(x)^l$ mit

$$f(x) = x^2 + ax + b \text{ für } a, b \in \mathbb{R}$$

und $f(x)$ irreduzibel. Für $l = 1$ erhalten wir die rationale Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Für $l \geq 1$ gibt es einen Vektor $v \in V$, sodass

$$U := [\{v, \varphi(v), f(\varphi)(v), \varphi f(\varphi)(v), ..., f^{l-1}(\varphi)(v), \varphi f^{l-1}(\varphi)(v)\}]$$

ein φ-invarianter Unterraum der Dimension $2l$ ist, d.h. die erzeugenden Vektoren von U bilden eine Basis. Die Einschränkung $\varphi = \varphi|_U$ hat bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -a & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -a & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 & -b \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine modifizierte rationale Normalform.

14. Affine Geometrie

Definition 14.1. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $A \neq \varnothing$ eine Menge. A heißt *affiner Raum* über K bezüglich V, wenn es eine Funktion $+ : V \times A \longrightarrow A$ gibt, sodass gilt:

(A1) $p + (x + y) = (p + x) + y \ \forall x, y \in V \ \forall p \in A$
(A2) $p + 0 = p \ \forall p \in A$
(A3) $p + x = p$ für $p \in A$ und $x \in V \Rightarrow x = 0$
(A4) $\forall p, q \in A \, \exists x \in V : q = p + x$

Die Elemente von A heißen *Punkte*. Formal betrachten wir die leere Menge $A = \varnothing$ auch als affinen Raum.

Definition 14.2. Sei A ein affiner Raum über K bezüglich V und sei $x \in V$. Die Abbildung $t_x : A \longrightarrow A$ mit $p \mapsto t_x(p) := p + x$ heißt *Translation* (oder *Verschiebung*) um x.

Proposition 14.3. *Sei A ein affiner Raum bezüglich V. Dann gilt:*

(a) *Jedes $x \in V$ definiert eine bijektive Abbildung $t_x : A \longrightarrow A$ mit $t_x(p) = p + x$.*
(b) *Für $x, y \in V$ mit $x \neq y$ ist $t_x \neq t_y$, sogar $t_x(p) \neq t_y(p)$ für alle $p \in A$. Die Abbildung $t : V \longrightarrow \mathrm{Bij}(A, A)$ mit $x \mapsto t_x$ ist daher injektiv.*

Insbesondere folgt aus $t_x(p) = p$ für ein $p \in A$, dass $x = 0$. Die Abbildung t_{-x} ist invers zu t_x. Zu $p, q \in A$ existiert immer genau ein $x \in V$ mit $t_x(p) = q$.

Korollar 14.4. *Sei A eine nichtleere Menge, K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist A ein affiner Raum über K bezüglich V genau dann, wenn es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $t : V \longrightarrow \mathrm{Bij}(A, A)$ mit $x \mapsto t_x$ gibt, der zugleich transitiv ist, d.h. $\forall p, q \in A \ \exists x \in V$ mit $t_x(p) = q$. (V ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition und $\mathrm{Bij}(A, A)$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen.)*

Definition 14.5. Seien $p, q \in A$. Der eindeutige Vektor $x \in V$ mit $p + x = q$ heißt *Verbindungsvektor* von p und q. Wir schreiben $x = \overrightarrow{pq}$.

Lemma 14.6. *Seien $p, q, r \in A$. Dann gilt:*

(a) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$
(b) $\overrightarrow{pp} = 0$
(c) $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$

Theorem 14.7. *Sei V ein K-Vektorraum und seien A und B affine Räume bezüglich V. Dann gibt es eine Bijektion $f : A \longrightarrow B$ mit $f(p + x) = f(p) + x \ \forall p \in A \, \forall x \in V$.*

Definition 14.8. Sei A ein affiner Raum über K bezüglich V und $T \subset A$ mit $T \neq \varnothing$. Dann heißt T *affiner Teilraum* genau dann, wenn es ein $p \in T$ und einen Unterraum $U \subset V$ gibt, sodass $T = p + U = \{p + x : x \in U\}$. Formal betrachten wir $T = \varnothing$ auch als einen affinen Teilraum.

Definition 14.9. Sei M eine Matrix. Ein Gleichungssystem der Form $Mx = b_0$ heißt *inhomogenes lineares Gleichungssystem.*

Proposition 14.10. *Sei $M \in \mathrm{Mat}(p \times q, K)$ und $b_0 \in K^p$, sowie $(M|b_0) := (Me_1 \dots Me_q|b_0)$ die um die Spalte b_0 erweiterte Matrix zum inhomogenen linearen Gleichungssystem $Mx = b_0$. Dann ist $Mx = b_0$ lösbar genau dann, wenn $b_0 \in [\{Me_1, \dots, Me_q\}]$, das heißt genau dann, wenn $\mathrm{Rang}(M) = \mathrm{Rang}(M|b_0)$.*

Cramersche Regel: Sei $M \in \mathrm{GL}(q, K)$. Dann ist die eindeutige Lösung von $Mx = b_0$ gegeben durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \text{ mit } x_i = \frac{1}{\det M} \det(Me_1, \dots, Me_{i-1}, b_0, Me_{i+1}, \dots, Me_q).$$

Korollar 14.11. *Die affinen Teilräume von $A = K^n$ bezüglich $V = K^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind genau die Lösungsmengen inhomogener Gleichungssysteme in n Variablen.*

Lemma 14.12. *Sei A ein affiner Raum über K bezüglich V und $A_0 = p + U$ ein nichtleerer affiner Teilraum von A.*

(a) *Sei $q \in A$. Dann ist $A_0 = q + U \Leftrightarrow q \in A_0$.*
(b) *Es gilt: $U = \{\overrightarrow{pq} : q \in A_0\}$.*
(c) *Sei $x \in U, q \in A$ und $q + x \in A_0$. Dann ist $q \in A_0$.*
(d) *Seien $A_1 = p_1 + U_1$ und $A_2 = p_2 + U_2$ affine Teilräume von A. Dann gilt $A_1 = A_2$ genau dann, wenn $U_1 = U_2$ und $p_1 \in A_2$.*
(e) *Der affine Teilraum $A_0 = p + U$ ist ein affiner Raum über K bezüglich U.*

Definition 14.13. Sei A ein affiner Raum über K bezüglich V. Die *Dimension* von A ist definiert als $\dim A := \dim V$. Wir legen zudem die folgenden Bezeichnungen fest:
$\dim A = 0 : A$ heißt *Punkt* (und ist ein Punkt im Sinne von Definition 14.1).
$\dim A = 1 : A$ heißt *Gerade*.
$\dim A = 2 : A$ heißt *Ebene*.
Ein affiner Teilraum $A_0 \subset A$ mit $\dim A_0 = \dim A - 1$ heißt *Hyperebene* in A.
Die Dimension der leeren Menge definieren wir als -1.

Definition 14.14. Sei $M \subset A$ eine Teilmenge. Dann ist die *affine Hülle* von M definiert als

$$[M] = \bigcap_{\substack{M \subset A_j \subset A \\ A_j \text{ affiner Teilraum}}} A_j$$

d.h. $[M]$ ist der kleinste affine Teilraum von A, der M enthält.

Theorem 14.15. *(Dimensionsformel für affine Teilräume) Sei A ein affiner Raum bezüglich V und seien $A_1 = p_1 + U_1$ und $A_2 = p_2 + U_2$ affine Teilräume von A. Dann gilt:*

$$\dim A_1 + \dim A_2 = \begin{cases} \dim[A_1 \cup A_2] + \dim A_1 \cap A_2, & \textit{falls } A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \\ \dim[A_1 \cup A_2] + \dim(U_1 \cap U_2) - 1, & \textit{falls } A_1 \cap A_2 = \emptyset \end{cases}$$

Definition 14.16. Seien $A_1 = p_1 + U_1$ und $A_2 = p_2 + U_2$ nichtleere affine Teilräume eines affinen Raumes A. Dann heißen A_1 und A_2 *parallel* genau dann, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$. Wir schreiben $A_1 || A_2$.

15. Skalarprodukte

Definition 15.1. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*) auf V ist eine Funktion $s =<,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

($S1$) $s(x+y,z) = s(x,z) + s(y,z)\ \forall x,y,z \in V$
($S2$) $s(\lambda x,y) = \lambda s(x,y)\ \forall x,y \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
($S3$) $s(x,y) = s(y,x)\ \forall x,y \in V$
($S4$) $x \neq 0 \Rightarrow s(x,x) > 0\ \forall x \in V$

($S3$) heißt, dass s *symmetrisch* ist, ($S1$) und ($S2$) bedeuten Linearität in der ersten Variablen. Mit ($S3$) folgt Linearität in der zweiten Variablen, insgesamt also *Bilinearität.* ($S4$) heißt, dass s *positiv definit* ist. Die Funktion $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *symmetrische Bilinearform*, wenn sie ($S1$), ($S2$) und ($S3$) erfüllt. Eine Matrix $M = (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt *symmetrische Matrix*, wenn $M = M^t$, d.h. $\forall i,j \in \{1,...,n\} : m_{ij} = m_{ji}$.

Theorem 15.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $b_1,\dots,b_n$. Dann existiert eine Bijektion zwischen der Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen und der Menge der symmetrischen Bilinearformen $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$:*

$$M \mapsto s \text{ mit } s(x,y) := x^t M y,$$

wobei die Vektoren x und y mit ihren Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $b_1,\dots,b_n$ identifiziert werden. Diese Bijektion ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Sei $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und $b_1,\dots,b_n$ eine Basis von V. Definiere $m_{ij} := s(b_i,b_j) \in \mathbb{R}$ und $M := (m_{ij})$. Dann heißt M die *darstellende Matrix* der symmetrischen Bilinearform s bezüglich obiger Basis.

Definition 15.3. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*) auf V ist eine Funktion $s =<,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

($S1$) $s(x+y,z) = s(x,z) + s(y,z)\ \forall x,y,z \in V$
($S2$) $s(\lambda x,y) = \lambda s(x,y)\ \forall x,y \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
($S3$) $s(x,y) = \overline{s(y,x)}\ \forall x,y \in V$
($S4$) $x \neq 0 \Rightarrow [s(x,x) \in \mathbb{R} \text{ und } s(x,x) > 0]\ \forall x \in V$

Wenn ($S1$), ($S2$) und ($S3$) erfüllt sind, heißt s *Hermitesche Form*, genauer Hermitesche *sesquilineare* (oder *semilineare*) Form.

Theorem 15.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $b_1,\dots,b_n$. Dann existiert eine Bijektion zwischen der Menge der Hermiteschen Matrizen $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $M = \overline{M}^t$ und der Menge der Hermiteschen sesquilinearen Formen $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$:*

$$M \mapsto s \text{ mit } s(x,y) = x^t M \bar{y},$$

wobei erneut die Vektoren x und y mit ihren Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $b_1,\dots,b_n$ identifiziert werden.

Definition 15.5. Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt heißt *euklidischer Vektorraum.* Ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt heißt *unitärer Vektorraum.*

Definition 15.6. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $x \in V$. Die reelle Zahl $\sqrt{< x,x >}$ heißt *Länge* (oder *Norm* oder *Betrag*) von x. Wir schreiben $||x|| := \sqrt{< x,x >}$. Falls $||x|| = 1$, heißt x *Einheitsvektor* (oder *normierter Vektor*).

Lemma 15.7. *Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Seien $x,y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) $||x|| \geq 0$ *und* $[||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0]$

(b) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
(c) $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$ *(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)*
(d) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Dreiecksungleichung)*

Definition 15.8. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.

(a) Vektoren $x, y \in V$ heißen *senkrecht* (oder *orthogonal*) zueinander, wenn $< x, y >= 0$. Wir schreiben $x \perp y$.
(b) Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt *Orthogonalsystem*, wenn

$$[0 \notin M \text{ und } \forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow x \perp y].$$

Zudem heißt M *Orthonormalsystem* (ONS), oder *orthonormiertes System*, wenn M ein Orthogonalsystem ist und $\forall x \in M : ||x|| = 1$.

Proposition 15.9. *Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und seien $x, y \in V$ sowie $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein Orthonormalsystem und $z \in [M]$. Dann gilt:*

(a) $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.
(b) $x \perp u \, \forall u \in V \Leftrightarrow x = 0$.
(c) *Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig und $n \leq \dim V$.*
(d) $z = \sum\limits_{j=1}^{n} < z, v_j > v_j$.

Definition 15.10. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und B eine Basis von V. Wenn die Vektoren aus B ein Orthonormalsystem bilden, heißt diese Basis eine *Orthonormalbasis* (ONB) von V.

Theorem 15.11. *Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $U = [\{v_1, \dots, v_l\}]$ ein l-dimensionaler Unterraum. Dann hat U eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_l\}$.*

Definition 15.12. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $M \subset V$ eine Teilmenge. Die Menge $M^\perp := \{y \in V :< x, y >= 0 \, \forall x \in M\}$ heißt *orthogonales Komplement* von M. Untervektorräume U_1 und U_2 von V heißen *senkrecht* (oder *orthogonal*) zueinander, wenn $\forall x \in U_1, y \in U_2 : x \perp y$. Wir schreiben $U_1 \perp U_2$.

Definition 15.13. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V - \{0\}$. Der *Winkel* $\alpha := \sphericalangle (x, y)$ ist definiert durch $\cos \alpha = \dfrac{< x, y >}{||x|| \cdot ||y||}$.

Proposition 15.14. *Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$. Dann gilt:*

(a) $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos \sphericalangle (x, y)$ *(Cosinus-Satz)*
(b) $x \perp y \Rightarrow ||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ *(Satz des Pythagoras)*

16. Normalformen von Endomorphismen IV: Symmetrische und Hermitesche Matrizen, orthogonale und unitäre Abbildungen

Proposition 16.1. *Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit* $\dim V < \infty$ *und sei* $f \in \mathrm{End}(V)$*. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung* $f^* \in \mathrm{End}(V)$*, sodass*

$$\forall x, y \in V \colon < f(x), y > = < x, f^*(y) > .$$

Wenn f bezüglich einer Orthonormalbasis die darstellende Matrix A hat, dann hat f^* bezüglich derselben Orthonormalbasis die darstellende Matrix $\overline{A}^t$. Die Abbildung f^* heißt die zu f adjungierte lineare Abbildung. *Manchmal wird diese auch mit f^{ad} bezeichnet. Die Matrix $\overline{A}^t$ heißt die* zu A adjungierte Matrix.

Definition 16.2. Sei V ein unitärer Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und sei $f \in \mathrm{End}(V)$.

(a) f heißt *selbstadjungiert*, wenn $f = f^*$.
(b) f heißt *normal*, wenn $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Theorem 16.3. *Sei V ein unitärer Vektorraum mit* $\dim V < \infty$ *und sei* $f \in \mathrm{End}(V)$*. Dann sind äquivalent:*

- *V hat eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von f besteht.*
- *f ist normal.*

Lemma 16.4. *Sei* $f \in \mathrm{End}(V)$ *normal. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^*)$
(b) $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f^*, \bar{\lambda})$

Korollar 16.5. *Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar und es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Proposition 16.6. *Alle Eigenwerte Hermitescher Matrizen sind reell.*

Korollar 16.7. *Symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$ sind diagonalisierbar und es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Definition 16.8. Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\forall x, y \in V \colon < f(x), f(y) > = < x, y >$, d.h. f erhält das Skalarprodukt. Dann heißt f eine *orthogonale Abbildung*, wenn V euklidisch ist, bzw. eine *unitäre Abbildung*, wenn V unitär ist.

Lemma 16.9. *Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und* $f \in \mathrm{End}(V)$*. Dann sind äquivalent:*

- *f ist orthogonal bzw. unitär.*
- $\forall x \in V : \|f(x)\| = \|x\|$, *d.h. f erhält die Länge von Vektoren.*
- $\forall x \in V : \|x\| = 1 \Rightarrow \|f(x)\| = 1$.

Theorem 16.10.

(a) *Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ und sei* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ *gegeben durch die darstellende Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$*. Dann ist f orthogonal genau dann, wenn A invertierbar ist und $A^t = A^{-1}$. Eine Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ *mit diesen Eigenschaften heißt* orthogonale Matrix. *Die Menge* $O(n) = \mathrm{Orth}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A$ *orthogonal*$\}$ *ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, die* orthogonale Gruppe.
(b) *Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum mit Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ und sei* $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ *gegeben durch die darstellende Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$*. Dann ist f unitär genau dann, wenn A invertierbar ist und $\overline{A}^t = A^{-1}$. Eine Matrix* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$

mit diesen Eigenschaften heißt unitäre Matrix. *Die Menge* $U(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) :$ A *unitär*$\}$ *ist eine Untergruppe von* $GL_n(\mathbb{C})$, *die* unitäre Gruppe.

Proposition 16.11. *Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei A eine Matrix. Dann sind äquivalent:*

- *A ist orthogonal bzw. unitär.*
- *Die Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis.*
- *Die Zeilenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis.*

Theorem 16.12. *Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und sei f ein unitärer Endomorphismus. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f. Bezüglich dieser Orthonormalbasis ist f also durch eine Diagonalmatrix gegeben. Alle Eigenwerte haben Betrag 1.*

Theorem 16.13. *Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und sei f ein orthogonaler Endomorphismus. Dann existiert eine Orthonormalbasis von V, bezüglich derer die darstellende Matrix von f die folgende Form hat:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & B_1 & & \\ & & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & B_l \end{pmatrix}$$

wobei $B_j = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix}$ *mit* $\alpha_j \in (0, 2\pi) - \{\pi\}$.