Darstellungstheorie und Homologische Algebra

Vorlesungsmitschrieb zur Vorlesung bei Prof. Dr. Steffen Koenig
Universität Stuttgart, WiSe 16/17 und SoSe 17

Maximilian Hofmann

11. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Algebren, Darstellungen, Moduln

Es sei k ein Körper. Alle betrachteten Ringe sind assoziativ und besitzen ein Einselement, welches unter Ringhomomorphismen erhalten bleibt. 17.10.2016

1.1 Definition Ein Ring A heißt *k-Algebra*, falls A ein Vektorraum über k ist und

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \qquad \text{für alle } a, b \in A \text{ und } \lambda \in k.$$

Für einen Ring A sei $\mathrm{Z}(A) = \{a \in A : ab = ba \text{ für alle } b \in A\}$ das Zentrum von A.

1.2 Lemma *Für einen Ring A sind äquivalent.*

(a) *Es ist A eine k-Algebra.*

(b) *Es gibt einen Ringhomomorphismus $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A)$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Ist A eine k-Algebra, so definiere $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A)$ durch $\alpha(\lambda) = \lambda \cdot 1_A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Wir müssen eine mit der Ringstruktur kompatible k-Vektorraumstrukture auf A definieren. Dazu definiere $\lambda \cdot a := \alpha(\lambda)a$ für $\lambda \in k$ und $a \in A$. Dann ist $\lambda(ab) = \alpha(\lambda)ab = (\lambda a)b$ und $\lambda(ab) = \alpha(\lambda)ab = a\alpha(\lambda)b = a(\lambda b)$ für $a, b \in A$ und $\lambda \in k$, da $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Z}(A)$. $\square$

Beispiele
- Es ist $A = k$ mit $\mathrm{id}\colon k \to \mathrm{Z}(A) = k$ eine k-Algebra.
- Für $n \geq 1$ ist $A = \mathrm{M}_n(k)$ mit

$$\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A),\ \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$$

  eine k-Algebra mit $\dim_k(A) = n^2$. Beachte, dass wegen $\mathrm{Z}(A) = \{\lambda I_n : \lambda \in k\}$ die k-Algebrastruktur auf A eindeutig bestimmt ist.
- Der Polynomring $A = k[x]$ wird durch $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A) = k[x],\ \lambda \mapsto \lambda$ zu einer k-Algebra.

  Sei $f(x) \in A$ mit $\deg(f) \geq 1$. Für $\lambda \in k$ ist dann $\lambda + (f(x)) =: \bar{\lambda} \neq 0$, also wird auch $A/(f(x))$ zu einer k-Algebra durch $\bar{\alpha}\colon k \to A/(f(x)),\ \lambda \mapsto \bar{\lambda}$.

  Auf diese Weise erhalten wir beispielsweise die $\mathbf{Q}$-Algebra $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \mathbf{Q}[x]/(x^2 - 2)$.
- Für $n \geq 1$ erhalten wir die Algebra der oberen Dreiecksmatrizen über k

$$A = \begin{pmatrix} k & \cdots & k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & k \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{M}_n(k)$$

  durch $\alpha\colon k \mapsto \mathrm{Z}(A), \lambda \mapsto \lambda I_n$.
- Sei G eine multiplikative geschriebene Gruppe. Sei V der k-Vektorraum mit Basis G. Dann ist für $v, w \in V$

$$v = \sum_{g \in G} \lambda_g g \ \text{ fast alle } \lambda_g = 0 \qquad \text{und} \qquad w = \sum_{h \in G} \mu_h h \ \text{ fast alle } \mu_h = 0.$$

Definiere eine Multiplikation auf V durch

$$v \cdot w := \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in H} \mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (\lambda_g \mu_h)(gh) = \sum_{j\in G} \left(\sum_{j=gh} \lambda_g \mu_h\right) j.$$

Dann ist V eine k-Algebra. Das Einselement ist gegeben durch das neutrale Element $e \in G$, denn es ist

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) e = \sum_{g\in G} \lambda_g (ge) = \sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} \lambda_g (eg) = e \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right).$$

Wir schreiben $kG := V$.

1.3 Definition Die *Gruppenalgebra kG* einer Gruppe G über dem Körper k ist ein k-Vektorraum mit Basis $\{g : g \in G\}$, die Multiplikation ist die lineare Fortsetzung der Gruppenmultiplikation.

Ein *Köcher* $Q = (Q_0, Q_1)$ ist ein gerichteter Graph mit einer Menge von Punkten Q_0 und gerichteten Kanten Q_1, d.h. es gibt Abbildungen $s, t \colon Q_1 \to Q_0$ und wir sagen eine Kante $\alpha \in Q_1$ geht von $s(\alpha) \in Q_0$ (***s**ource*) nach $t(\alpha) \in Q_0$ (***t**arget*).

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$$

Ein *Weg* in Q der Länge $n \geq 1$ ist eine sinnvolle Folge von Pfeilen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, d.h. $\alpha_i \in Q_1$ mit $t(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, $t(\alpha_2) = s(\alpha_3), \ldots$.

Im Folgenden sei Q ein Köcher mit $|Q_0| < \infty$, wobei wir häufig auch $|Q_1| < \infty$ voraussetzen werden.

1.4 Definition Die *Wegealgebra kQ* hat als k-Basis alle Wege der Länge $n \geq 1$ in Q und für jeden Punkt $i \in Q_0$ einen sogenannten *faulen Weg* e_i der Länge 0. Die Multiplikation ist die k-lineare Fortsetzung der Hintereinanderausführung von Wegen, d.h.

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) & t(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ 0 & t(\alpha_n) \neq s(\beta_1). \end{cases}$$

Beachte dass hierbei für faule Wege $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)e_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ falls $t(\alpha_n) = i$ und 0 sonst, analog ist $e_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ falls $s(\alpha_1) = i$ und 0 sonst.

Das Einselement in kQ ist gegeben durch $\sum_{i\in Q_0} e_i$ (hier ist $|Q_0| < \infty$ notwendig), denn für $j \in Q_0$ und $\alpha \in Q_1$ ist

$$\left(\sum_{i\in Q_0} e_i\right) e_j = \sum_{i\in Q_0} e_i e_j = e_j e_j = e_j$$

$$\left(\sum_{i\in Q_0} e_i\right) \alpha = \left(\sum_{i\in Q_0} e_i\right) e_{s(\alpha)} \alpha = \sum_{i\in Q_0} e_i e_{s(\alpha)} \alpha = e_{s(\alpha)} e_{s(\alpha)} \alpha = \alpha.$$

Für Multiplikation von rechts ist die Rechnung analog.

Beispiel Sei Q der Köcher mit 4 Punkten und 3 Kanten gegeben durch

$$\begin{tikzcd} & & 3 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ & & 4. \end{tikzcd}$$

Dann ist eine k-Basis von kQ gegeben durch $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma\}$, also $\dim_k(kQ) = 9$.

1.5 Definition Ein *Homomorphismus von k-Algebren* ist ein Ringmorphismus $\varphi\colon A \to B$, der auch k-linear ist. Es heißt φ *Isomorphismus von k-Algebren*, falls φ zusätzlich bijektiv ist. 19.10.2016

Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Isomorphismus von k-Algebren, so auch sein Inverses $\varphi^{-1}\colon B \to A$.

Beispiele
- Für jede k-Algebra A ist $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A),\ \lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$ ein Homomorphismus von k-Algebren.
- Sei $G := \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{e, g\}$ die zyklische Gruppe von Ordnung 2, d.h. e ist das Einselement und $g^2 = e$. Sei $A := kG$ die Gruppenalgebra, d.h. A hat $\{e, g\}$ als k-Basis, $\dim_k(A) = 2 = |G|$.

  Sei $B := k \oplus k$ die k-Algebra gegeben durch die direkte Summe als k-Vektorräume, wobei die Multiplikation komponentenweise definiert ist.

  Definiere die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon A &\longrightarrow B \\ e &\longmapsto (1,1) \\ g &\longmapsto (1,-1). \end{aligned}$$

  Für $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in k$ ist

$$\begin{aligned} \varphi((\lambda e + \mu g)(\lambda' e + \mu' g)) &= \varphi((\lambda\lambda' + \mu\mu')e + (\lambda\mu' + \mu\lambda')g) \\ &= (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \lambda\mu' + \mu\lambda', \lambda\lambda' + \mu\mu' - \lambda\mu' - \mu\lambda') \\ &= (\lambda + \mu, \lambda - \mu)(\lambda' + \mu', \lambda' - \mu') \\ &= \varphi(\lambda e + \mu g)\varphi(\lambda' + \mu' g). \end{aligned}$$

  Somit ist φ ein k-Algebrenhomomorphismus.

  Es sind $(1,1)$ und $(1,-1)$ in B genau dann linear unabhängig, wenn $1 \neq -1$, d.h. genau dann, wenn $\mathrm{char}(k) \neq 2$. In diesem Fall ist also $\varphi\colon kG \to k \oplus k$ ein Algebrenisomorphismus.

  Es bleibt der Fall $\mathrm{char}(k) = 2$. Betrachte das Element $u := e + g \in A$. Dann ist auch $\{e, u\}$ eine k-Basis von A.

  Es wird $eu = e(e+g) = e^2 + eg = e + g = u$ und $gu = g(e+g) = ge + g^2 = g + e = u$. Zudem ist $u^2 = (e+g)^2 = e^2 + 2eg + g^2 = 2 + 2g = 0$, allerdings $u \neq 0$.

  Für ein Element $0 \neq (\lambda, \mu) \in k \oplus k$ gilt aber stets $(\lambda, \mu)^2 = (\lambda^2, \mu^2) \neq 0$, also folgt $A \not\simeq k \oplus k$.

  Sei $C := k[x]/(x^2)$. Dann sind A und C kommutative k-Algebren der Dimension 2.

  Definiere die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon A &\longrightarrow C \\ e &\longmapsto 1_C \\ u &\longmapsto x. \end{aligned}$$

  Für $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in k$ ist

$$\begin{aligned} \psi((\lambda e + \mu u)(\lambda' e + \mu' u)) &= \psi(\lambda\lambda' e + (\lambda\mu' + \mu\lambda')u) \\ &= \lambda\lambda' 1_C + (\lambda\mu' + \mu\lambda')x \\ &= (\lambda 1_C + \mu x)(\lambda' 1_C + \mu' x) \\ &= \psi(\lambda e + \mu u)\psi(\lambda' e + \mu' u). \end{aligned}$$

  Somit ist ψ ein k-Algebrenhomomorphismus. Schließlich ist $\{1, x\}$ eine k-Basis, somit ist $\psi\colon kG \to k[x]/(x^2)$ sogar ein k-Algebrenisomorphismus.

  Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass für $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{e, g\}$ und einen Körper k

$$kG \simeq \begin{cases} k \oplus k & \mathrm{char}(k) \neq 2 \\ k[x]/(x^2) & \mathrm{char}(k) = 2. \end{cases}$$

- Sei Q der Köcher mit 3 Punkten und 2 Kanten gegeben durch

$$Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \right).$$

Dann hat die Wegealgebra kQ die k-Basis $\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, also $\dim_k(kQ) = 6$.

Sei

$$B := \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

die k-Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen.

Definiere eine lineare Abbildung $\varphi\colon A = kQ \to B$ durch

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha\beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies definiert einen k-Algebrenisomorphismus $\varphi\colon kQ \to B$.

Allgemein betrachte für $n \geq 1$ den Köcher

$$Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \dashrightarrow n-1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n \right).$$

Dann ist die Wegealgebra kQ isomorph zur k-Algebra der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen.

$$kQ \simeq \begin{pmatrix} k & \dots & k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

1.6 Lemma *Sei A eine k-Algebra, $\dim_k(A) = n < \infty$. Dann existiert ein injektiver Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon A \to B = \mathrm{M}_n(k)$.*

Beweis. Sei $B = \mathrm{End}_k(A) \simeq \mathrm{M}_n(k)$. Für $a \in A$ definiere $\alpha_a\colon A \to A, b \mapsto ba$. Zu zeigen ist $\alpha_a \in B$, d.h. α_a ist k-linear. Dazu ist für $b, b_1, b_2 \in A$ und $\lambda \in k$

$$\begin{aligned} \alpha_a(b_1 + b_2) &= (b_1 + b_2)a = b_1 a + b_2 a = \alpha_a(b_1) + \alpha_a(b_2) \\ \alpha_a(\lambda b) &= (\lambda b)a = \lambda(ba) = \lambda \alpha_a(b). \end{aligned}$$

Somit ist $\alpha_a \in B$ für $a \in A$. Nun zeige, dass $\varphi\colon A \to B,\ a \mapsto \alpha_a$ ein k-Algebrenhomomorphismus ist. Dazu ist für $a, a_1, a_2 \in A$ und $\lambda \in k$ für alle $b \in A$

$$\begin{aligned} \alpha_{a_1 + a_2}(b) &= b(a_1 + a_2) = ba_1 + ba_2 = \alpha_{a_1}(b) + \alpha_{a_2}(b) \\ \alpha_{\lambda a}(b) &= b(\lambda a) = \lambda(ba) = \lambda \alpha_a(b) \\ \alpha_{a_1 a_2}(b) &= b(a_1 a_2) = (ba_1)a_2 = (\alpha_{a_1}\alpha_{a_2})(b). \end{aligned}$$

Beachte die Konvention zur Komposition in $\mathrm{End}_k(A)$. Somit ist φ ein k-Algebrenhomomorphismus. Für $a_1, a_2 \in A$ folgt aus $\alpha_{a_1} = \alpha_{a_2}$, dass $\alpha_{a_1}(1) = \alpha_{a_2}(1)$, also $a_1 = 1 \cdot a_1 = 1 \cdot a_2 = a_2$. Also ist φ injektiv. □

1.7 Definition Sei A eine k-Algebra und V ein k-Vektorraum mit $B = \mathrm{End}_k(V)$. Eine *Darstellung* von A auf V ist ein Homomorphismus von k-Algebren $\varphi\colon A \to B$. Die Darstellung heißt *treu*, falls φ injektiv ist. 21.10.2016

Nach Lemma 1.6 hat jede endlichdimensionale k-Algebra A eine treue Darstellung auf $V = A$, gegeben durch $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(A),\ a \mapsto (b \mapsto ba)$. Diese Darstellung heißt die *reguläre* Darstellung von A.

1.8 Definition Seien $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\psi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Ein *Homomorphismus von Darstellungen* ist eine k-lineare Abbildung $f\colon V \to W$, sodass für alle $v \in V$ und $a \in A$ stets $f(\varphi(a)(v)) = \psi(a)(f(v))$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert für alle $a \in A$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi(a)} & V \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow f \\ W & \xrightarrow{\psi(a)} & W \end{array}$$

Der Homomorphismus heißt *Isomorphismus von Darstellungen*, falls f ein Vektorraumisomorphismus ist. In diesem Fall ist auch $f^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus von Darstellungen.

Beispiel Sei $A = k$ und $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ eine Darstellung von A, d.h. V ist ein k-Vektorraum. Da φ ein k-Algebrenhomomorphismus ist, gilt

$$\varphi(1_A) = \mathrm{id}_V \qquad \varphi(\lambda 1_A) = \lambda\varphi(1_A) = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$$

für $\lambda \in k$. Doch dies ist gerade die k-Vektorraumstruktur auf V. Somit ist ein Isomorphismus von Darstellungen von k gerade ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.

Ist $\dim_k(V) = n$, d.h. $V \simeq k^n$, so ist eine Darstellung von k auf k^n gegeben durch

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die darstellende Matrix ist in Blockdiagonalform mit Blöcken der Größe 1×1.

1.9 Definition Seien $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\psi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Dann ist

$$\varphi \oplus \psi\colon A \to \mathrm{End}_k(V \oplus W),\ a \mapsto \left(\begin{array}{c|c} \varphi(a) & 0 \\ \hline 0 & \psi(a) \end{array}\right)$$

die *direkte Summe* der Darstellungen V und W. Für $v \in V$, $w \in W$ und $a \in A$ gilt dann also $(\varphi \oplus \psi)(v, w) = (\varphi(v), \psi(w))$.

Eine Darstellung heißt *zerlegbar*, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe von Darstellungen ungleich 0 ist. Sonst heißt sie *unzerlegbar*.

- Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass nicht alle Darstellungen direkte Summen von eindimensionalen Darstellungen sind (nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar).
- Es gibt Algebren, die keine eindimensionalen Darstellungen besitzen. Betrachte dazu $A = \mathrm{M}_n(k)$ und eine Darstellung $\varphi\colon A \to B = \mathrm{End}_k(V)$. Dann ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein zweiseitiges Ideal in A.

  Proposition *Es ist $A = \mathrm{M}_n(k)$ eine einfache Algebra, d.h. A hat außer* 0 *und A keine zweiseitigen Ideale.*

  Beweis. Sei $I \trianglelefteq A$ mit $I \neq 0$. Wir zeigen $I = A$. Dazu sei $M = (m_{ij})_{ij} \neq 0$ mit $M \in I$. Dann gibt es (i, j) mit $m_{ij} \neq 0$. Es sei E_{pq} die Matrix mit 1 an der Stelle (p, q) und 0 sonst. Dann ist $E_{ii}ME_{jj} = m_{ij}E_{ij} \in I$, also auch $E_{ij} \in I$. Zudem ist für $k, \ell = 1, \ldots, n$ nun $E_{ki}E_{ij}E_{j\ell} = E_{k\ell} \in I$, d.h. I enthält eine k-Basis von A, also $I = A$. $\square$

Damit muss eine Darstellung $\varphi\colon A = \mathrm{M}_n(k) \to B = \mathrm{End}_k(V)$ entweder 0 (d.h. $V = 0$) sein oder injektiv (also treu) sein, was jedoch $n^2 = \dim_k(A) \leq \dim_k(B) = (\dim_k(V))^2$ impliziert. Doch dann kann $\mathrm{M}_n(k)$ für $n > 1$ keine eindimensionalen Darstellungen besitzen.

Allgemein folgt aus der Existenz eines k-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_\ell(k)$ aus $\varphi \neq 0$ also stets $l \geq n$. Wir erhalten die kleinstmögliche Darstellung ungleich 0 durch $\mathrm{id}\colon \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k)$. Diese heißt die *natürliche Darstellung* von $\mathrm{M}_n(k)$.

1.10 Proposition *Sei A eine k-Algebra. Sei $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ eine Zerlegung von 1_A als Summe von paarweise orthogonalen Idempotenten, d.h. $e_i^2 = e_i$ und $e_ie_j = 0$ für $i \neq j$.*

Dann ist für jedes $i = 1, \ldots, n$ eine Darstellung gegeben durch

$$\varphi_i\colon A \to \mathrm{End}_k(e_iA) = \{e_ia : a \in A\},\ a \mapsto (\varphi_i(a)\colon e_ib \mapsto e_iba)$$

und die direkte Summe $\varphi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n$ ist die reguläre Darstellung von A.

Beispiele

- Für $A = \mathrm{M}_n(k)$ ist eine Zerlegung in paarweise orthogonale Idempotente gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, e_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, e_2} + \ldots + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\, e_n}.$$

  Dann ist

$$e_1A = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ e_2A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},\quad \ldots,\quad e_nA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix},$$

  d.h. e_iA ist die i-te Zeile in A, somit ist als Vektorräume $e_iA \simeq k^n$. Die Darstellung φ_i aus Proposition 1.10 wirkt auf den Zeilenvektor durch Multiplikation mit einer Matrix von rechts, d.h. φ_i ist isomorph zur natürlichen Darstellung von $\mathrm{M}_n(k)$.

  Aus Proposition 1.10 folgt somit, dass für $A = \mathrm{M}_n(k)$ die reguläre Darstellung eine direkte Summe von n natürlichen Darstellungen ist.

- Sei Q ein Köcher und betrachte die Wegealgebra $A = kQ$. Dann ist $1_A = \sum_{i \in Q_0} e_i$ eine Zerlegung in paarweise orthogonale Idempotente. Es ist

$$e_iA = \{\text{Linearkombinationen von Wegen, die bei } i \in Q_0 \text{ starten}\}.$$

  Sei nun Q der Köcher mit 4 Punkten und 3 Kanten gegeben durch

$$\begin{tikzcd} & & 3 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & & 4. \end{tikzcd}$$

  Dann ist

$$e_1A = \langle e_1, \alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma \rangle, \quad e_2A = \langle e_2, \beta, \gamma \rangle, \quad e_3A = \langle e_3 \rangle, \quad e_4A = \langle e_4 \rangle.$$

Beweis von 1.10. Seien $a_1, a_2 \in A$ und $\lambda \in k$. Dann zeigt

$$e_i a_1 + e_i a_2 = e_i(a_1 + a_2) \quad \text{und} \qquad \lambda e_i a_1 = e_i(\lambda a_1),$$

dass $e_i A$ ein Untervektorraum von A ist. Somit ist $\varphi_i(a) \in \mathrm{End}_k(e_i A)$ als Einschränkung der regulären Darstellung. Wir zeigen, dass $A = \bigoplus_{i=1}^n e_i A$. Sei $a \in A$. Dann ist

$$a = 1_A \cdot a = (e_1 + \ldots + e_n)a = e_1 a + \ldots + e_n a \in \sum_{i=1}^n e_i A.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Summe direkt ist, also dass $e_j A \cap \left(\sum_{i=1, i\neq j}^n e_i A\right) = \{0\}$ für $j = 1, \ldots, n$. Sei also $e_j a = \sum_{i=1, i\neq j}^n e_i a$ für ein $a \in A$. Dann ist

$$e_j a = e_j(e_j a) = e_j \left(\sum_{i=1, i\neq j}^n e_i a \right) = \sum_{i=1, i\neq j}^n e_i e_j a = 0.$$

Also ist $A = \bigoplus_{i=1}^n e_i A$. Nun gilt für die reguläre Darstellung

$$\varphi(a) \colon e_1 b + \ldots + e_n b = b \mapsto ba = e_1 ba + \ldots + e_n ba = \varphi_1(a)(e_1 b) + \ldots + \varphi_n(a)(e_n b).$$

Somit besitzt die darstellende Matrix von $\varphi(a)$ Blockdiagonalgestalt, also $\varphi = \bigoplus_{i=1}^n \varphi_i$. □

1.11 Definition Sei A eine k-Algebra. Ein A-*Linksmodul* M (Bezeichnung ${}_A M$) ist ein k-Vektorraum mit einer Abbildung $A \times M \to M,\ (a, m) \mapsto am$ (Linksoperation von A auf M), sodass für all $a, b \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ und $\lambda \in k$ gilt 24.10.2016

(1L) $1_A \cdot m = m$

(2L) $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$

(3L) $(a + b)m = am + bm$

(4L) $(ab)m = a(bm)$

(5L) $(a\lambda)m = \lambda(am) = a(\lambda m)$

Analog ist ein A-*Rechtsmodul* M (Bezeichnung M_A) ein k-Vektorraum mit einer Abbildung $M \times A \to M,\ (m, a) \mapsto ma$ (Rechtsoperation von A auf M). Es gelten analoge Axiome (1R-5R) für Rechtsmoduln, insbesondere für (4R) erhalten wir jedoch

$$\begin{aligned} \text{Linksmodul: } (ab)m &= a(bm) \quad \text{d.h. erst } b\text{, dann } a. \\ \text{Rechtsmodul: } m(ab) &= (ma)b \quad \text{d.h. erst } a\text{, dann } b. \end{aligned}$$

Die restlichen Axiome sind inhaltlich identisch.

Wir schreiben $M \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ falls M ein A-Linksmodul ist, analog $M \in \mathtt{Mod}\text{-}A$ falls M ein A-Rechtsmodul ist. Ist M ein (über k) endlichdimensionaler A-Linksmodul, so schreibe $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$, analog schreiben wir $M \in \mathtt{mod}\text{-}A$, falls M ein endlichdimensionaler A-Rechtsmodul ist.

Sei A eine k-Algebra. Die *entgegengesetzte Algebra* A^{op} ist als k-Vektorraum gleich A, jedoch mit Multiplikation $a \underset{A^{\mathrm{op}}}{\cdot} b = b \underset{A}{\cdot} a$. Es ist A^{op} eine k-Algebra. Ist A kommutativ, so gilt $A^{\mathrm{op}} = A$. Schließlich sind A^{op}-Linksmodul gleich A-Rechtsmoduln, also $A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{Mod} = \mathtt{Mod}\text{-}A$.

1.12 Proposition *Es bezeichne $D = \mathrm{Hom}_k(-, k)$ die k-Dualität. Sei $M \in A\text{-}\mathtt{Mod}$. Dann ist $D(M) \in \mathtt{Mod}\text{-}A$ mit $fa \colon M \to k,\ m \mapsto f(am)$ für $f \in D(M)$, $a \in A$ und $m \in M$.*

Beweis. Wir weisen Axiom (4R) für $D(M)$ nach. Dazu seien $f \in D(M)$, $a, b \in A$ und $m \in M$. Dann ist

$$(fa)b \colon m \mapsto (fa)(bm) = f(a(bm)) \qquad \text{bzw.} \qquad f(ab) \colon m \mapsto f((ab)m).$$

Wegen $M \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ ist $a(bm) = (ab)m$, also folgt $(fa)b = f(ab)$, d.h. $D(M) \in \mathtt{Mod}\text{-}A$. □

1.13 Definition Sei A eine k-Algebra und seien X, Y zwei A-Linksmoduln. Eine k-lineare Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homomorphismus von A-Linksmoduln* falls $f(ax) = af(x)$ für alle $a \in A$ und $x \in X$. Bezeichnung: $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ bzw. $f \in \mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$.

Ein Homomorphismus von Moduln f heißt *Modulisomorphismus*, falls f bijektiv ist. Dann ist auch f^{-1} ein Modulisomorphismus.

Es ist $\mathrm{Hom}_k(X, Y)$ gerade der k-Vektorraum der k-linearen Abbildungen von X nach Y.

1.14 Lemma *Seien $X, Y \in A$-$\mathtt{mod}$. Dann ist $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY) \simeq \mathrm{Hom}_A((DY)_A, (DX)_A)$ als k-Vektorräume.*

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$. Sei $f^* = Df\colon DY \to DX$ die duale Abbildung gegeben durch $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ für $\varphi \in DY$. Wir zeigen: f^* ist ein Rechtsmodulhomomorphismus. Dazu ist für $\varphi \in DY$, $x \in X$ und $a \in A$

$$
\begin{aligned}
f^*(\varphi a)(x) &= ((\varphi a) \circ f)(x) = (\varphi a)(f(x)) = \varphi(a(f(x))) \\
(f^*(\varphi)a)(x) &= ((\varphi \circ f)a)(x) = (\varphi \circ f)(ax) = \varphi(f(ax)).
\end{aligned}
$$

Da f ein Homomorphismus von A-Linksmoduln ist, gilt $a(f(x)) = f(ax)$ und $f^*\colon DY \to DX$ ist ein Homomorphismus von A-Rechtsmoduln. Nach Voraussetzung sind die Moduln X und Y endlichdimensional über k, somit ist die Abbildung $f \mapsto f^*$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen (siehe lineare Algebra). $\square$

Beachte, dass beim Anwenden der Dualität sich die Kompositionsreihenfolge umkehrt.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "fg"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
DZ \arrow[r, "g^*"] \arrow[rr, bend right, "(fg)^* = g^* f^*"'] & DY \arrow[r, "f^*"] & DX
\end{tikzcd}
$$

1.15 Theorem *Sei A eine k-Algebra.*

(a) *Sei $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ eine Darstellung von A. Dann ist V ein A-Linksmodul durch $av := \varphi(a)(v)$ für $a \in A$ und $v \in V$.*

(b) *Sei M ein A-Linksmodul. Dann ist $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(M)$ mit $\varphi(a)\colon m \to am$ für $a \in A$ eine Darstellung von A.*

(c) *Seien $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\psi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Dann ist $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen genau dann, wenn f Modulhomomorphismus ist.*

Beweis. (a): Ist φ eine Darstellung, so ist V ein k-Vektorraum. Wir prüfen die Modulaxiome (1L-5L). Seien $a, a_1, a_2 \in A$, $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in k$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
1_A v &= \varphi(1_A)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v, && \text{da } \varphi \text{ Alg.hom.} \\
a(v_1 + v_2) &= \varphi(a)(v_1 + v_2) = \varphi(a)(v_1) + \varphi(a)(v_2) = av_1 + av_2, && \text{da } \varphi \in \mathrm{End}_k(V) \\
(a_1 + a_2)v &= \varphi(a_1 + a_2)(v) = \varphi(a_1)(v) + \varphi(a_2)(v) = a_1 v + a_2 v, && \text{da } \varphi\text{Alg.hom.} \\
(a_1 a_2)v &= \varphi(a_1 a_2)(v) = \varphi(a_1)(\varphi(a_2)v) = a_1(a_2 v), && \text{da } \varphi\text{Alg.hom} \\
a(\lambda v) &= \varphi(a)(\lambda v) = \lambda\varphi(a)(v) = \lambda(av), && \text{da } \varphi \in \mathrm{End}_k(V)
\end{aligned}
$$

Damit ist V ein A-Linksmodul.

(b): Ist M ein A-Linksmodul, so ist M ein k-Vektorraum. Sei $a \in A$ und $\varphi(a)\colon m \mapsto am$. Zu zeigen ist: $\varphi(a)$ ist k-linear. Dazu seien $m, m_1, m_2 \in M$ und $\lambda \in k$. Mit (2L) und (5L) folgt

$$
\begin{aligned}
\varphi(a)(m_1 + m_2) &= a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2 = \varphi(a)(m_1) + \varphi(a)(m_2) \\
\varphi(a)(\lambda m) &= a(\lambda m) = \lambda(am) = \lambda\varphi(a)(m)
\end{aligned}
$$

Somit ist $\varphi(a)$ eine k-lineare Abbildung für alle $a \in A$. Nun zeige, dass $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ ein k-Algebrenhomomorphismus ist. Dazu nutzen wir (1L), (3L), (4L) und (5L) für $m \in M$, $a, a_1, a_2 \in A$ und $\lambda \in k$

$$\begin{aligned}
\varphi(1)(m) &= 1 \cdot m = m = \mathrm{id}_M(m) \\
\varphi(a_1 + a_2)(m) &= (a_1 + a_2)m = a_1 m + a_2 m = \varphi(a_1)(m) + \varphi(a_2)(m) = (\varphi(a_1) + \varphi(a_2))(m) \\
\varphi(a_1 a_2)(m) &= (a_1 a_2)m = a_1(a_2 m) = \varphi(a_1)(\varphi(a_2)(m)) = (\varphi(a_1)\varphi(a_2))(m) \\
\varphi(\lambda a)(m) &= (\lambda a)m = \lambda(am) = \lambda\varphi(a)(m)
\end{aligned}$$

Damit ist $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ eine Darstellung von A.

(c): Sei $f\colon V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Für alle $a \in A$ ist die Kommutativität der folgenden beiden Diagramme äquivalent.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi(a)"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r, "\psi(a)"] & W
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "v \mapsto av"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r, "w \mapsto aw"] & W
\end{tikzcd}$$

Hom. von Darstellungen $\Leftrightarrow$ Hom. von Linksmoduln

Dies folgt aus (a) und (b), da $\varphi(a)(v) = av$ für $v \in V$, bzw. $\psi(a)(w) = aw$ für $w \in W$. $\square$

Durch die nun hergestellte Beziehung zwischen Darstellungen und Moduln lassen sich Begriffe vergleichen oder übertragen.

Beispiel Wir betrachten direkte Summen. Seien dazu $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\psi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Nach Definition 1.9 ist die direkte Summe von φ und ψ gegeben durch

$$\varphi \oplus \psi\colon A \to \mathrm{End}_k(V \oplus W),\ a \mapsto \left(\begin{array}{c|c} \varphi(a) & 0 \\ \hline 0 & \psi(a) \end{array}\right)$$

Nach Theorem 1.15 sind nun V und W auch A-Linksmoduln. Doch dann ist auch die direkte Vektorraumsumme $V \oplus W$ ein A-Linksmodul durch $a(v, w) := (av, aw)$ für $a \in A$, $v \in V$ und $w \in W$.

Daneben sind wegen $a(v, w) = (av, aw) = (\varphi(a)(v), \psi(a)(w)) = (\varphi \oplus \psi)(a)(v, w)$ die Begriffe der direkten Summe von Darstellungen und der direkten Summe von Linksmoduln äquivalent.

1.16 Definition Sei A eine k-Algebra und M ein A-Linksmodul. 26.10.2016

Ein Untervektorraum $U \subseteq M$ heißt *Untermodul* (oder Teilmodul) von M, falls $am \in M$ für alle $a \in A$ und $m \in M$.

Es heißt $0 \neq M$ *einfacher Modul*, falls 0 und M die einzigen Teilmoduln von M sind. Es heißt M *halbeinfach*, falls M eine endliche direkte Summe von einfachen Moduln ist.

Ist $U \subseteq M$ ein Untermodul von M, so ist auch der Quotientenvektorraum M/U ein A-Linksmodul, genannt der *Quotientenmodul*. Hier ist die Operation von A gegeben durch $a(m + U) := am + U$ für $a \in A$ und $m \in M$. Dies ist wohldefiniert, da für $m_1 + U = m_2 + U \in M/U$ gilt

$$am_1 + U = am_2 + U \Leftrightarrow am_1 - am_2 \in U \Leftrightarrow a(m_1 - m_2) \in U,$$

jedoch ist $a(m_1 - m_2) \in U$ da $U \subseteq M$ ein Teilmodul ist.

Beispiele

- Sei $A := kG$ für eine endliche Gruppe G. Dann ist $U = \{\lambda \sum_{g \in G} g : \lambda \in k\}$ ein eindimensionaler Untervektorraum von A.

Für $h \in G$ ist die Abbildung $h \cdot (-)\colon G \to G$ bijektiv, somit gilt für $h \in G$ und $\lambda \in k$

$$h\left(\lambda \sum_{g\in G} g\right) = \lambda \sum_{g\in G} hg = \lambda \sum_{g\in G} g,$$

Wegen $\dim_k(U) = 1$ ist U ein einfacher Untermodul von A.

- Sei $A = \mathrm{M}_n(k)$ für ein $n \geq 1$. Sei $\varphi\colon A = \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_\ell(k)$ eine Darstellung von A. Aus $\varphi \neq 0$ folgt dann $n \leq \ell$ nach einem früheren Beispiel.

  Ist daher M ein A-Linksmodul, so folgt aus $M \neq 0$ stets $\dim_k(M) \geq n$. Sei k^n der *natürliche* A-Linksmodul zur natürlichen Darstellung $\mathrm{id}\colon \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k)$. Da k^n minimale k-Dimension aller A-Linksmoduln ungleich 0 besitzt, ist k^n ein einfacher A-Linksmodul.

  Weiterhin erhalten wir aus der Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ mit $e_i = E_{ii}$, d.h. die Matrix, die 1 an der Stelle (i,i) und 0 überall sonst besitzt, folgende Zerlegung von A als A-Linksmodul

  $$_AA = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$$

  Es ist Ae_i ein n-dimensionaler A-Linksmodul für alle i, also einfach. Somit ist $_AA$ ein halbeinfacher Modul.

  Wir zeigen nun: $_AAe_1 \simeq {}_AAe_2 \simeq \ldots \simeq {}_AAe_n$ als A-Linksmoduln.

  Wir konstruieren einen Isomorphismus von A-Linksmoduln $Ae_i = AE_{ii} \xrightarrow{f} AE_{jj} = Ae_j$ durch

  $$f\colon AE_{ii} \to AE_{jj},\ aE_{ii} \mapsto aE_{ii}E_{ij} = aE_{ij} = aE_{ij}E_{jj} \in AE_{jj}$$

  Es ist f ein A-Linksmodulhomomorphismus, da für $a, b \in A$

  $$af(bE_{ii}) = a(bE_{ii}E_{ij}) = (abE_{ii})E_{ij} = f(abE_{ii}).$$

  Ebenso betrachte den A-Linksmodulhomomorphismus

  $$g\colon AE_{jj} \to AE_{ii},\ aE_{jj} \mapsto E_{jj}E_{ji} = aE_{ji} = aE_{ji}E_{ii} \in AE_{ii}.$$

  Dann ist für $a \in A$

  $$\begin{aligned}(f\circ g)(aE_{jj}) &= f(aE_{jj}E_{ji}) = aE_{jj}E_{ji}E_{ij} = aE_{jj}\\ (g\circ f)(aE_{ii}) &= g(aE_{ii}E_{ij}) = aE_{ii}E_{ij}E_{ji} = aE_{ii}\end{aligned}$$

  Somit ist f ein Isomorphismus von A-Linksmoduln mit Inversem g.

- Seien $_AX$ und $_AY$ zwei A-Linksmoduln und $f \in \mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$. Dann ist $\mathrm{Kern}(f) \subseteq X$ ein Untermodul von X und $\mathrm{Im}(f)$ ein Untermodul von Y.

Für $X, Y \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ ist $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ ein k-Vektorraum, aber im Allgemeinen kein A-Modul. Wie kann man $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ zu einem Links- oder Rechtsmodul machen?

1.17 Definition Ein A-Bimodul X (Schreibweise $_AX_A$) ist ein A-Linksmodul und auch ein A-Rechtsmodul, sodass $(ax)b = a(xb)$ für alle $x \in X$ und $a, b \in A$.

Beispiel Es ist A ein A-Bimodul, da für $x, a, b \in A$ wegen Assoziativität $(ax)b = a(xb)$ gilt.

1.18 Proposition

(a) *Ist $_AX_A$ ein A-Bimodul und $_AY$ ein A-Linksmodul, so ist* $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ *ein A-Linksmodul durch $af\colon x \mapsto f(xa)$ für $f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$, $a \in A$ und $x \in X$.*

(b) *Ist $_AX$ ein A-Linksmodul und $_AY_A$ ein A-Bimodul, so ist* $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ *ein A-Rechtsmodul durch $fa\colon x \mapsto f(x)a$ für $f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$, $a \in A$ und $x \in X$.*

Beweis. (a): Wir zeigen, dass af ein A-Linksmodulhomomorphismus ist. Seien $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann ist

$$(af)(bx) = f((bx)a) = f(b(xa)) = bf(xa) = b(af)(x).$$

Nun zeigen wir, dass $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ damit ein A-Linksmodul ist. Seien dazu wieder $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann gilt

$$((ab)f)(x) = f(x(ab)) = f((xa)b) = (bf)(x) = a(bf)(x).$$

(b): Wir zeigen, dass fa ein A-Linksmodulhomomorphismus ist. Seien $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann ist

$$(fa)(bx) = f(bx)a = (bf(x))a = b(f(x)a) = b(fa)(x).$$

Nun zeigen wir, dass $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ damit ein A-Rechtsmodul ist. Seien dazu wieder $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann gilt

$$(f(ab))(x) = f(x)(ab) = (f(x)a)b = ((fa)(x))b = ((fa)b)(x).$$ □

1.19 Proposition *Sei ${}_AY$ ein A-Linksmodul. Dann ist*

$$\alpha\colon {}_A(\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_AY)) \xrightarrow{\sim} {}_AY,\ f \mapsto f(1)$$

ein Isomorphismus von A-Linksmoduln.

Beweis. Es ist α ein A-Linksmodulhomomorphismus, da für $a \in A$ und $f \in \mathrm{Hom}_A(A, Y)$ gilt

$$\alpha(af) = (af)(1) = f(1 \cdot a) = f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = a\alpha(f).$$

Es ist α surjektiv, da für $y \in Y$ die Abbildung $f\colon A \to Y$ definiert durch $f(a) = ay$ ein Homomorphismus von A-Linksmoduln ist mit $\alpha(f) = f(1) = 1 \cdot y = y$.

Es ist α injektiv, da $\alpha(f) = f(1) = 0$ für $a \in A$ stets $f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = a \cdot 0 = 0$ impliziert, also $f = 0$. □

1.20 Proposition

(a) *Sei ${}_AM$ ein A-Linksmodul. Sei $E = \mathrm{Hom}_A({}_AM, {}_AM)$ der* Endomorphismenring *von ${}_AM$. Dann ist M ein A-E-Bimodul.*

(b) *Seien ${}_AX, {}_AY \in A$-`mod`. Dann ist* $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ *ein* $\mathrm{End}_A(X)$-$\mathrm{End}_A(Y)$*-Bimodul.*

Beweis. (a): Sei $m \in M$ und $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Definiere die E-Rechtsmodulstruktur auf M durch $mf := f(m) \in M$. Für $f, g \in \mathrm{End}_A(M)$ ist dann 31.10.2016

$$m(fg) = (fg)(m) = g(f(m)) = (mf)g.$$

Beachte hierbei wieder die Konvention zur Komposition von linearen Abbildungen. Die restlichen Rechtsmodulaxiome übertragen sich unmittelbar. Es ist nun M ein A-E-Bimodul, da für $a \in A$, $m \in M$ und $f \in \mathrm{End}_A(M)$ gilt

$$(am)f = f(am) = a(fm) = a(mf).$$

(b): Sei $(\varphi\colon X \to Y) \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$. Für $(f\colon X \to X) \in \mathrm{End}_A(X)$ definiere die $\mathrm{End}_A(X)$-Linksmodulstruktur auf $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ durch Präkomposition mit f. Für $(g\colon Y \to Y) \in \mathrm{End}_A(Y)$ definiere die $\mathrm{End}_A(Y)$-Rechtsmodulstruktur auf $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ durch Postkomposition mit g.

Die Bimoduleigenschaft folgt dann aus der Assoziativität der Komposition von Abbildungen, also $(f\varphi)g = f(\varphi g)$. □

Bemerkung Wir vergleichen Proposition 1.20 (b) mit Proposition 1.18.

In Proposition 1.18 wird gezeigt, dass $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ ein A-A-Bimodul ist, falls X oder Y ein A-A-Bimodul ist.

Ist nun beispielsweise $X = {}_AX_A$ ein A-A-Bimodul, so erhalten wir den A-Linksmodulhomomorphismus

$$A \to \mathrm{End}_A({}_AX),\ a \mapsto (x \mapsto xa).$$

Nun ist die A-Operation auf $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ aus Proposition 1.18 für $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ und $a \in A$ gegeben durch

$$a\varphi\colon x \mapsto \varphi(xa).$$

Nutzen wir nun oben angegebenen Homomorphismus $A \to \mathrm{End}_A(X)$, $a \mapsto f : (x \mapsto xa)$, so liefert die $\mathrm{End}_A(X)$-Operation auf $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ aus Proposition 1.20 die A-Operation

$$a\varphi := f\varphi\colon x \mapsto \varphi(f(x)) = \varphi(xa).$$

Somit folgt Proposition 1.18 aus Proposition 1.20 (b). Im Allgemeinen ist jedoch $\mathrm{End}_A({}_AX)$ verschieden von A.

2 Darstellungen von Köchern

Sei k ein Körper, $Q = (Q_0, Q_1)$ ein Köcher mit $|Q_0| < \infty$ und Einselement $1_{kQ} = \sum_{i \in Q_0} e_i$. Sei V ein kQ-Rechtsmodul. Setze

$$V(i) := Ve_i$$

für $i \in Q_0$. Beachte $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$, $e_i^2 = e_i$ und $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$. Damit ist für $v \in V$:

$$v = v1 = v \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \right) = \sum_{i \in Q_0} ve_i,$$

d.h. es gilt $V = \sum_{i \in Q_0} V(i)$. Sei nun $v \in V(i) \cap \sum_{i \neq j \in Q_0} V(j)$. Wegen $v \in V(i)$ ist $v = v'e_i$ mit $v' \in V$. Dann ist aber $ve_i = v'e_i^2 = v'e_i = v$, also $v = ve_i$. Wegen $v \in \sum_{i \neq j} V(j)$ ist $v = \sum_{j \neq i} u_j e_j$, also gilt

$$v = ve_i = \left(\sum_{j \neq i} u_j e_j \right) e_i = \sum_{j \neq i} u_j e_j e_i = \sum_{j \neq i} e_j \cdot 0 = 0.$$

Also ist $V = \bigoplus_{i \in Q_0} V(i)$.

Sei nun $\alpha \in Q_1$ ein Pfeil in Q. Da $\alpha \in kQ$, erhalten wir eine k-lineare Abbildung $V \to V,\ v \mapsto v\alpha$. Sei $s(\alpha) = i$ und $t(\alpha) = j$. Dann ist $\alpha = e_i \alpha e_j$ in kQ. Damit ist für $ve_\ell \in V(\ell)$ für $\ell \in Q_0$

$$(ve_\ell)\alpha = (ve_\ell)(e_i \alpha e_j) = v(e_\ell e_i)\alpha e_j = \begin{cases} 0 & \ell \neq i \\ (v\alpha)e_j & \ell = i \end{cases}.$$

Somit erhalten wir für jedes $\alpha \in Q_1$ mit $s(\alpha) = i$ und $t(\alpha) = j$ eine k-lineare Abbildung

$$V(\alpha)\colon V(i) \to V(j),\ v \mapsto v\alpha.$$

Also erhalten wir zu jedem kQ-Rechtsmodul k-Vektorräume $V(i)$ für jeden Punkt $i \in Q_0$ und k-lineare Abbildungen $V(\alpha)$ für jeden Pfeil $\alpha \in Q_1$. Wir schreiben die Vektorräume $V(i)$ an die Punkte des Köchers und die Abbildungen $V(\alpha)$ an die Pfeile des Köchers, zum Beispiel für den Köcher

$$1 \xrightarrow{\ \alpha\ } 2 \xrightarrow{\ \beta\ } 3$$

schreiben wir für einen kQ-Rechtsmodul V mit den obigen Konstruktionen

$$V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(2) \xrightarrow{V(\beta)} V(3).$$

2.1 Definition Sei $Q = (Q_0, Q_1)$ ein Köcher. Eine *Darstellung des Köchers Q* über einem Körper k besteht aus zwei Zuordnungen

$$Q_0 \ni i \longmapsto V(i) \in k\text{-}\mathtt{Mod}$$

$$Q_1 \ni (\alpha\colon s(\alpha) \to t(\alpha)) \longmapsto (V(\alpha)\colon V(s(\alpha)) \to V(t(\alpha)))\ k\text{-linear}.$$

Bezeichnung: $V = ((V(i))_{i \in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha \in Q_1}) \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$.

Beispiel Für den Köcher

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

erhalten wir Darstellungen über einem Körper k durch

$$k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k \qquad\qquad k \xrightarrow{27} k \xrightarrow{\frac{1}{3}} k$$

$$k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} k \qquad\qquad k \xrightarrow{\binom{1}{1}} k^2 \xrightarrow{(0\ 1)} k.$$

2.2 Proposition *Eine Darstellung des Köchers Q über k definiert genau einen kQ-Rechtsmodul. Wir erhalten eine bijektive Zuordnung* $\texttt{Mod-}kQ \leftrightarrow kQ\texttt{-Rep}$.

Beweis. Sei $V = \big((V(i))_{i\in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha\in Q_1}\big) \in kQ\texttt{-Rep}$. Setze $\hat{V} = \bigoplus_{i\in Q_0} V(i)$. Wir definieren eine kQ-Rechtsmodulstruktur auf $\hat{V}$.

Für faule Wege: Für $v = \sum_{j\in Q_0} v_j$ mit $v_j \in V(j)$ sei $ve_i := v_i$, d.h. Multiplikation mit e_i ist die Identität auf $V(i)$ und die Nullabbildung sonst.

Für Pfeile: Sei $\alpha \in Q_1$. Für $v = \sum_{j\in Q_0} v_j$ mit $v_j \in V(j)$ sei $v\alpha := v_{s(\alpha)}V(\alpha) \in V(t(\alpha))$, d.h. Multiplikation mit α ist die Abbildung $V(\alpha)\colon V(s(\alpha)) \to V(t(\alpha))$ auf $V(s(\alpha))$ und die Nullabbildung sonst.

Für allgemeine Wege: Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Weg in Q. Für $v = \sum_{j\in Q_0} v_j$ mit $v_j \in V(j)$ sei $v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := v_{s(\alpha_1)}(V(\alpha_1)\cdots V(\alpha_n))) \in V(t(\alpha_n))$, d.h. die Hintereinanderausführung der Operation von Pfeilen.

Die Operation auf den Basiselementen wird linear fortgesetzt zu einer kQ-Rechtsoperation. $\square$

2.3 Definition Seien $V = \big((V(i))_{i\in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha\in Q_1}\big)$ und $W = \big((W(i))_{i\in Q_0}, (W(\alpha))_{\alpha\in Q_1}\big)$ Darstellungen eines Köchers Q über einem Körper k.

Ein *Homomorphismus von Köcherdarstellungen* $f\colon V \to W$ besteht aus linearen Abbildungen $f(i)\colon V(i) \to W(i)$ für alle $i \in Q_0$, sodass $xV(\alpha)f(t(\alpha)) = xf(s(\alpha))W(\alpha)$ für alle $\alpha \in Q_1$ und $x \in V(s(\alpha))$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
V(s(\alpha)) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "f(s(\alpha))"] & V(t(\alpha)) \arrow[d, "f(t(\alpha))"] \\
W(s(\alpha)) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(t(\alpha))
\end{tikzcd}$$

Es heißt f *Isomorphismus*, falls $f(i)$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist für alle $i \in Q_0$.

Beispiele

- Sei Q der Köcher mit einem Punkt und einem Pfeil.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop right, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Sind $V = (V(1), V(\alpha))$ und $W = (W(1), W(\alpha))$ Darstellungen von Q über einem Körper k, so ist ein Isomorphismus zwischen V und W gegeben durch einen k-linearen Isomorphismus $T\colon V(1) \to W(1)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "T"] & V(1) \arrow[d, "T"] \\
W(1) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(1)
\end{tikzcd}$$

Somit gilt $W(\alpha) = T^{-1}V(\alpha)T$. Die kanonische rationale Form, bzw. die Jordansche Normalform falls k algebraisch abgeschlossen ist, geben somit Normalformen für Darstellungen von Q.

- Sei Q der Köcher mit zwei Punkten und einem Pfeil gegeben durch

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2.$$

Sind wieder V und W Darstellungen von Q über k, so ist ein Isomorphismus zwischen V und W gegeben durch zwei k-lineare Isomorphismen $S\colon V(1) \to W(1)$ und $T\colon V(2) \to W(2)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "S"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(2) \end{tikzcd}$$

Somit gilt $W(\alpha) = S^{-1}V(\alpha)T$. Der Gauß-Algorithmus liefert hier eine Normalform für Darstellungen von Q: Durch geeignete S und T kann $V(\alpha)$ auf die Form

$$V(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Somit gibt es eine Basis B von $V(1)$ und eine Basis C von $V(2)$, als auch ganze Zahlen $n, \ell, m \geq 0$ mit $\dim V(1) = n + \ell$ und $\dim V(2) = n + m$, sodass gilt 02.11.2016

$$\begin{array}{rclll} V(1) & \xrightarrow{V(\alpha)} & V(2) & & \\ b_i & \longmapsto & c_i & \simeq k \xrightarrow{1} k & \text{für } i = 1, \ldots, n \\ b_i & \longmapsto & 0 & \simeq k \xrightarrow{0} 0 & \text{für } i = n+1, \ldots, n+\ell \\ & & c_i & \simeq 0 \xrightarrow{0} k & \text{für } i = n+1, \ldots, n+m \end{array}$$

Damit ist jede Darstellung des Köchers Q eine direkte Summe von Darstellungen der Form

$$k \xrightarrow{1} k \qquad k \xrightarrow{0} 0 \qquad 0 \xrightarrow{0} k.$$

Da die zugehörigen kQ-Rechtsmoduln zu $k \xrightarrow{0} 0$ und $0 \xrightarrow{0} k$ eindimensional über k sind, sind diese beiden Darstellungen unzerlegbar.

Wäre $k \xrightarrow{1} k$ zerlegbar, so muss $k \xrightarrow{1} k = (k \xrightarrow{0} 0) \oplus (0 \xrightarrow{0} k)$ gelten. Dann gibt es $\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & k \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mu \end{smallmatrix}\right)"] \\ k \oplus 0 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & 0 \oplus k \end{tikzcd}$$

Da jedoch die untere Zeile 0 ist, kann dieses Diagramm nicht kommutieren. Also ist auch $k \xrightarrow{1} k$ unzerlegbar.

Ergebnis: Der Köcher $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ hat bis auf Isomorphie genau 3 verschiedene unzerlegbare Darstellungen.

Bemerkung Wir zeigen, dass Homomorphismen von Köcherdarstellungen genau den Homomorphismen von kQ-Rechtsmoduln entsprechen.

Dazu seien $\hat{V} = \bigoplus_{i \in Q_0} V(i)$ und $\hat{V} = \bigoplus_{i \in Q_0} W(i)$ zwei kQ-Rechtsmoduln, mit entsprechenden Darstellungen $V = ((V(i))_i, (V(\alpha))_\alpha)$ und $W = ((W(i))_i, (W(\alpha))_\alpha)$.

Ist nun $f\colon \hat{V} \to \hat{W}$ eine kQ-lineare Abbildung, so ist $(ve_i)f = (ve_i^2)f = (ve_i)fe_i \in V(i)$, d.h. wir erhalten durch Einschränken k-lineare Abbildungen $f(i)\colon V(i) \to V(i)$, sodass

$$f = \begin{pmatrix} f(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(n) \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\alpha \in Q_1$ ein Pfeil in Q. Nach Konstruktion ist die Kommutativität der folgenden beiden Diagramme äquivalent.

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "-\cdot\alpha"] \arrow[d, "f(i)"] & V(j) \arrow[d, "f(j)"] \\ W(i) \arrow[r, "-\cdot\alpha"] & W(j) \end{tikzcd} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "f(i)"] & V(j) \arrow[d, "f(i)"] \\ W(i) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(j) \end{tikzcd}$$

Modulhom. $\Leftrightarrow$ Hom. von Darstellungen

Die Aussage gilt analog für faule Wege e_i für $i \in Q_0$. Für Wege beachte, dass das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "f(i)"] & V(j) \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, "f(j)"] & V(k) \arrow[d, "f(k)"] \\ W(i) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(j) \arrow[r, "W(\beta)"] & W(k) \end{tikzcd}$$

auf Grund der Kommuativität aller einzelnen Quadrate insgesamt kommutiert, wodurch die Äquivalenz für die Wege auf die Äquivalenz für Pfeile zurückgeführt wird.

Beispiel Gegeben sei ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung in den Funktionen $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ mit konstanten Koeffizienten, d.h. es gibt Matrizen A und B und eine Funktion f mit

$$Ax + B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f.$$

Frage: Wie können A und B vereinfacht werden? Gehe durch invertierbare Matrizen S und T über zur Differentialgleichung

$$(SAT)z + (SBT)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = g.$$

Also gehe vom Paar (A, B) über zu (SAT, SBT). Gesucht: Gemeinsame Normalform für das Paar (A, B) von Matrizen gleicher Größe.

- Weierstrass 1867: Normalform für gewisse A, B (mit $\det(A + \lambda B) \neq 0$).
- Kronecker 1890: allgemeine Lösung.

Betrachte den *Kroneckerköcher*

$$Q = \left(1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2 \right).$$

Eine Darstellung V von Q über k besteht aus zwei Vektorräumen $V(1)$ und $V(2)$ und zwei linearen Abbildungen $V(1) \xrightarrow{A,B} V(2)$. Ist W eine weitere Darstellung von Q, so ist ein Isomorphismus von V und W gegeben durch k-lineare Isomorphismen, d.h. invertierbare Matrizen, S und T, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, shift left, "A"] \arrow[r, shift right, "B"'] \arrow[d, "S^{-1}"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, shift left, "SAT"] \arrow[r, shift right, "SBT"'] & W(2) \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S^{-1}"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, "SAT"] & W(2) \end{tikzcd} \text{ und } \begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "B"] \arrow[d, "S^{-1}"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, "SBT"] & W(2) \end{tikzcd}$$

Somit ist das oben beschriebene Normalformenproblem äquivalent zum Isomorphieproblem für Darstellungen des Kroneckerköchers.

Wir bezeichnen die Wegealgebra kQ des Kroneckerköchers als *Kroneckeralgebra*. Für die Dimension von kQ gilt $\dim kQ = 4$. Wir suchen eine treue Darstellung $kQ \hookrightarrow \mathrm{M}_n(k)$ mit kleinstem n.

- Für $n = 1$ kann aus Dimensionsgründen keine treue Darstellung existieren.
- Für $n = 2$ gilt aus Dimensionsgründen dann $kQ \simeq \mathrm{M}_2(k)$. Es ist $\langle \alpha, \beta \rangle_k$ ein echtes zweiseitiges Ideal in kQ. Doch ist $\mathrm{M}_2(k)$ einfach, hat also keine echten zweiseitigen Ideale ungleich 0.
- Für $n = 3$ erhalten wir eine treue Darstellung durch

$$kQ \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix},$$

wobei die Bilder der Basiselemente gegeben sind durch

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen Beispiele von Köcherdarstellungen des Kroneckerköchers geben. Wir erhalten zwei nichtisomorphe einfache (d.h. die entsprechenden kQ-Rechtsmoduln sind einfach) Köcherdarstellungen durch

$$0 \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} k \qquad\qquad k \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} 0.$$

Damit sind bis auf Isomorphie alle einfachen kQ-Rechtsmoduln gegeben, da für eine Darstellung

$$V(1) \overset{A}{\underset{B}{\rightrightarrows}} V(2)$$

für $V(2) \neq 0$ stets $0 \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} k$ einen Teilmodul liefert.

Ist hingegen $V(2) = 0$, so hat $V(1) \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} 0$ stets $k \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} 0$ als Teilmodul.

Zu einer Darstellung V von kQ sei $\underline{\dim} V := (\dim V(i))_{i \in Q_0}$ der *Dimensionsvektor* von V.

Für $\lambda, \mu \in k$ betrachte Darstellungen mit $\underline{\dim} V = (1,1)$ des Kroneckerköchers gegeben durch

$$k \overset{\lambda}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} k.$$

Angenommen, es seien auch $s, t \in k$ und $a, b \in k \setminus \{0\}$ liefern einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] \arrow[d, "a"] & k \arrow[d, "b"] \\ k \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & k. \end{tikzcd}$$

Dann gilt $as = \lambda b$ und $at = \mu b$, also wegen $b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{a}{b} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

Somit sind die Darstellungen $k \overset{\lambda}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} k$ und $k \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} k$ isomorph genau dann, wenn es ein $c \in k \backslash \{0\}$ gibt mit $\binom{\lambda}{\mu} = c\binom{s}{t}$. Anders ausgedrückt, eine Parametermenge für Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen des Kroneckerköchers mit Dimensionsvektor $(1,1)$ ist durch die projektive Gerade $\mathbf{P}^1(k)$ gegeben. Eine "Normalform" erhalten wir für $\mu \in k$ durch

$$k \overset{1}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} k \qquad \text{und} \qquad k \overset{0}{\underset{1}{\rightrightarrows}} k.$$

Beispiel Sei A die k-Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen. Dann ist $A \simeq kQ$ mit dem Köcher 14.11.2016

$$Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3\right).$$

Wir wollen die unzerlegbaren Darstellungen von Q über k bestimmen.

Betrachte die einfachen Darstellungen $k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$, $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$ und $0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$. Diese sind paarweise nicht isomorph, da zum Beispiel im folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[d, "\wr"] \\ 0 \arrow[r] & k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

keine vertikalen Isomorphismen in den ersten beiden Spalten existieren können.

Betrachte nun die Darstellungen $k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$, $k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$ und $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$. Wir behaupten, dass diese Darstellungen unzerlegbar sind.

Angenommen, $M = k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$ wäre zerlegbar. Dann gibt es $X, Y \neq 0$ mit $M \simeq X \oplus Y$ und die Projektion $M \twoheadrightarrow X$ verknüpft mit der Inklusion $X \hookrightarrow M$ liefert einen Endomorphismus $p\colon M \to M$. Es ist $\mathrm{Im}(p) = X$ und wegen

$$\begin{tikzcd} p^2\colon M \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & M \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & M \\ & X \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\mathrm{id}_X"] & & X \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

ist $p^2 = p$. Also: Ist M zerlegbar, so gibt es $p = p^2 \in \mathrm{End}(M)$ mit $p \neq 0, \mathrm{id}$.

Wir zeigen nun, dass M unzerlegbar ist, indem wir zeigen, dass es kein solches p gegen kann. Ein $p \in \mathrm{End}(M)$ ist gegeben durch $a, b, c \in k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "a"] & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "b"] & k \arrow[d, "c"] \\ k \arrow[r, "1"] & k \arrow[r, "1"] & k \end{tikzcd}$$

Doch dann ist $a = b = c$ und wegen $p^2 = p$ also $a = 0, 1$, somit $p = 0, \mathrm{id}$. Daher ist M unzerlegbar.

Auf ähnliche Weise erhalten wir mit den drei einfachen Darstellungen von oben 6 unzerlegbare, paarweise nicht isomorphe Darstellungen von Q über k.

Zeige nun: Jede unzerlegbare Darstellung von Q ist isomorph zu einer dieser 6 Darstellungen.

Dazu sei $V = \left(V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(2) \xrightarrow{V(\beta)} V(3)\right)$ unzerlegbar.

Erster Schritt: Angenommen, $V(\alpha)$ sei nicht injektiv. Dann ist $\mathrm{Kern}(V(\alpha)) \neq 0$, also ist durch $V(1) \simeq \mathrm{Kern}(V(\alpha)) \oplus X$ eine nicht triviale Zerlegung von $V(1)$ als k-Vektorräume gegeben.

Mit Inklusion $\mathrm{Kern}(V(\alpha)) \hookrightarrow V(1)$ und Projektion $V(1) \twoheadrightarrow \mathrm{Kern}(V(\alpha))$ erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "f"] & \mathrm{Kern}(V(\alpha)) \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
V \arrow[d, "g"] & V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, two heads] & V(2) \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, "0"] & V(3) \arrow[d, "0"] \\
U & \mathrm{Kern}(V(\alpha)) \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist $fg = \mathrm{id}_U$ zudem $gfgf = gf$ mit f injektiv und g surjektiv. Daher ist $V = U \oplus \mathrm{Kern}(g)$ eine Zerlegung von Darstellungen. Da $U \neq 0$ und V unzerlegbar, ist $U = V$, daher $V(2) = V(3) = 0$ und damit $V(1) = k$, also $V \simeq \left(k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0\right)$.

Analog: Ist $V(\beta)$ nicht surjektiv, so ist $0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$ direkter Summand von V.

Zweiter Schritt: Angenommen, $V(\alpha)$ ist injektiv und $V(\beta)$ ist surjektiv.

Falls $V(1) = 0$, so ist $V = \left(0 \xrightarrow{0} V(2) \xrightarrow{V(\beta)} V(3)\right)$. Die Gauß-Normalform liefert, dass nun $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$, $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$ oder $0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$ ein direkter Summand von V ist. Da V jedoch unzerlegbar ist, ist V isomorph zu einer dieser 3 Darstellungen.

Falls $V(3) = 0$, so ist $V = \left(V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(2) \xrightarrow{0} 0\right)$. Wieder liefert die Gauß-Normalform, dass nun $k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$, $k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$ oder $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$ ein direkter Summand von V ist. Da V jedoch unzerlegbar ist, ist V isomorph zu einer dieser 3 Darstellungen.

Sei nun $V(1) \neq 0 \neq V(3)$. Zeige: $V \simeq \left(k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k\right)$.

Da $V(\alpha)$ injektiv ist, können wir $V(1) \subseteq V(2)$ als Teilmenge entlang $V(\alpha)$ identifizieren.

Angenommen, $V(\beta)$ ist nicht injektiv. Dann ist $U := \mathrm{Kern}(V(\beta)) \neq 0$.

Zeige: $V(1) \cap U \xhookrightarrow{V(\alpha)} U \xrightarrow{V(\beta)} 0$ ist direkter Summand von V.

Dazu wähle eine Basis von $U \cap V(1)$ und ergänze diese zu einer Basis von $V(1)$, d.h. erhalte $V(1) = U \cap V(1) \oplus X$. Nun ergänze die Basis von $U \cap V(1)$ zu einer Basis von U und ergänze diese Basis zu einer von $V(2)$, d.h. $V(2) = U \oplus Y$. Dann ist $U \cap V(1) \subseteq U$ und $X \subseteq Y$. Insgesamt erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
U \cap V(1) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U = \mathrm{Kern}(V(\beta)) \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[d, "0"] \\
V(1) = U \cap V(1) \oplus X \arrow[r, hook, "V(\alpha)"] \arrow[d, two heads] & V(2) = U \oplus Y \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, two heads] & V(3) \arrow[d, "0"] \\
U \cap V(1) \arrow[r, hook] & U \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $U \cap V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} U \xrightarrow{0} 0$ ein direkter Summand von V ist, im *Widerspruch* zu V unzerlegbar.

Also ist $U = 0$ und $V(\beta)$ ist ein Isomorphismus. Analog zeige, dass $V(\alpha)$ ein Isomorphismus ist.

Damit erhalten wir das folgende kommutative Diagramm, in dem die vertikalen Homomorphismen Isomorphismen sind.

$$\begin{tikzcd}
V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "V(\alpha)"', "\wr"] & V(2) \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"', "\wr"] & V(3) \arrow[d, "V(\beta)^{-1}"', "\wr"] \\
V(1) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V(2) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V(3)
\end{tikzcd}$$

Also ist $V \simeq \Big(V(1) \xrightarrow{\mathrm{id}} V(2) \xrightarrow{\mathrm{id}} V(3)\Big)$ und daher, da $V(1) = V(2) = V(3) \simeq k^n$ für ein $n \in \mathbf{N}$ also

$$V \simeq \Big(k^n \xrightarrow{I_n} k^n \xrightarrow{I_n} k^n\Big) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \Big(k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k\Big).$$

Da V unzerlegbar, ist also $V \simeq \Big(k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k\Big)$.

Analog kann gezeigt werden: Die unzerlegbaren Darstellungen von Köchern der Form

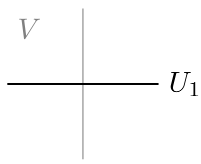
$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bullet.$$

sind alle dünn, d.h. für alle j ist $V(j)$ entweder k oder 0 und die linearen Abbildungen sind entweder 0 oder 1.

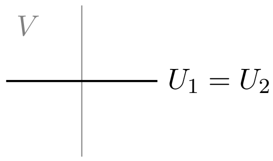
Beispiel (n-Unterraumprobleme) Sei V ein k-Vektorraum und $n \in \mathbf{N}$ mit $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbf{N}_0$. Suche, bis auf Basiswechsel in V, Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ von V mit $\dim U_j = \ell_j$ für alle j.

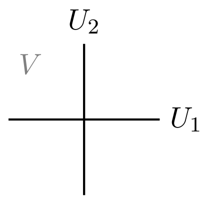
Für $\dim V = 2$, *alle* $\ell_j = 1$.

- $n = 1$: Eine Gerade in der Ebene.

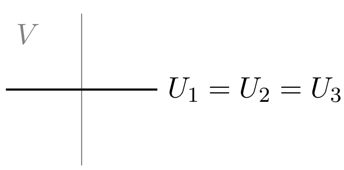


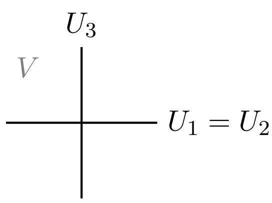
- $n = 2$: Wir können durch Basiswechsel die folgenden beiden Konfigurationen erreichen.

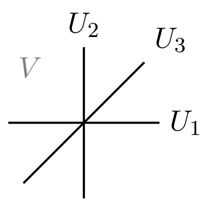




- $n = 3$: Durch Basiswechsel erreichen wir, bis auf Umordnung, die folgenden drei Konfigurationen.







  Im letzten Fall ordnen wir erst U_1 und U_2 wie gewünscht an und nutzen dann eine Basistransformation der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \neq 0$.

- $n = 4$: Hier gibt es unendliche viele verschiedene Konfigurationen. Beachte, dass 4 Geraden in der Ebene genau 4 Punkten auf der projektiven Geraden entsprechen. Das Doppelverhältnis dieser 4 Punkte ist dann eine Invariante (Beweis mit Darstellungstheorie später).

Wir suchen unzerlegbare Konfigurationen. Dabei heiße eine Konfiguration zerlegbar, d.h. es ist

$$(V, U_1, \dots, U_n) = (V^{(1)}, U_1^{(1)}, \dots, U_n^{(1)}) \oplus (V^{(2)}, U_1^{(2)}, \dots, U_n^{(2)}),$$

falls gilt

$$V = V^{(1)} \oplus V^{(2)} \text{ und } U_j = U_j^{(1)} \oplus U_j^{(2)} \text{ für alle } j.$$

Nun betrachte den *n-Unterraumköcher*:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
1 \arrow[urr, "\alpha_1"] & 2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] & \cdots & \cdots & n. \arrow[ull, "\alpha_n"']
\end{tikzcd}$$

Dieser hat Darstellungen der Form

$$\begin{tikzcd}
 & & V_0 & & \\
U_1 \arrow[urr, "V(\alpha_1)"] & U_2 \arrow[ur, "V(\alpha_2)"'] & \cdots & \cdots & U_n, \arrow[ull, "V(\alpha_n)"']
\end{tikzcd}$$

welche wir mit V bezeichnen wollen. Sei nun V eine unzerlegbare Darstellung des n-Unterraumköchers. Ist nun $V(\alpha_1)$ nicht injektiv, so ist

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
\mathrm{Kern}(V(\alpha_1)) \arrow[urr, "V(\alpha_1)"] & 0 \arrow[ur, "0"'] & \cdots & \cdots & 0 \arrow[ull, "0"']
\end{tikzcd}$$

ein direkter Summand von V. Da V unzerlegbar, ist V also isomorph zu

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
k \arrow[urr, "0"] & 0 \arrow[ur, "0"'] & \cdots & \cdots & 0, \arrow[ull, "0"']
\end{tikzcd}$$

d.h. V ist einfach. Analog für α_j.

Insgesamt erhalten wir: Ist die Darstellung V unzerlegbar, so ist V einfach oder alle $V(\alpha_j)$ sind injektiv.

Im letzten Fall beschreibt V aber eine Unterraumkonfiguration.

Weiterhin ist ein Isomorphismus von Darstellungen $V^{(1)} \simeq V^{(2)}$ durch einen Basiswechsel von $V^{(1)}$ zu $V^{(2)}$ gegeben, der durch die Injektionen $V(\alpha_i)$ auf $U_j^{(1)}$ zu $U_j^{(2)}$ einschränkt.

Daher sind alle Unterraumkonfigurationen gegeben durch die Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen des n-Unterraumköchers abzüglich der einfachen Darstellungen für einen festen Dimensionsvektor $\underline{\dim}\, V = (\dim V_0, \dim U_1, \dots, \dim U_n)$.

Die zuvor genannten Beispiele lassen sich nun einfach übertragen.

- $n = 1$: Hier gibt es nur einen Isomorphietyp vom gewünschten Dimensionsvektor, welcher gegeben ist durch

$$\begin{matrix} k^2 \\ \uparrow \\ k \end{matrix} \simeq \begin{matrix} k \\ {}_1\!\uparrow \\ k \end{matrix} \oplus \begin{matrix} k \\ {}_0\!\uparrow \\ 0 \end{matrix}$$

- $n = 2$: Hier gibt es zwei Isomorphietypen.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & k^2 & \\ k \arrow[ur] & & k \arrow[ul] \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd}[column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur, "1"] & & k \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} k \\ 0 \arrow[u, "0"] \end{tikzcd} \quad \text{oder} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & k^2 & \\ k \arrow[ur] & & k \arrow[ul] \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} k \\ k \arrow[u, "1"] \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} k \\ k \arrow[u, "1"] \end{tikzcd}$$

- $n = 3$: Hier gibt es drei Isomorphietypen.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & k^2 & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd}[column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur, "1"] & k \arrow[u, "1"] & k \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} k \\ 0 \arrow[u, "0"] \end{tikzcd} \quad \text{oder} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & k^2 & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd}[column sep=small] & k & \\ k \arrow[ur, "1"] & & k \arrow[ul, "1"'] \end{tikzcd} \oplus \begin{tikzcd} k \\ k \arrow[u, "1"] \end{tikzcd}$$

$$\text{oder} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & k^2 & \\ k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul] \end{tikzcd} \simeq \begin{tikzcd} & k^2 & \\ k \arrow[ur, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] & k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)"] & k \arrow[ul, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd}$$

Nun zu $n = 4$: Gesucht sind Konfigurationen von 4 Geraden in einer Ebene. Falls mindestens 16.11.2016
zwei Geraden übereinstimmen, gibt es wie oben nur endlich viele Möglichkeiten. Wie bei $n = 3$ können wir durch Basiswechsel die folgende Form erreichen:

$$\begin{tikzcd} & & k^2 = V_0 & & \\ k = U_1 \arrow[urr, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] & k = U_2 \arrow[ur, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] & & k = U_3 \arrow[ul, "\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)"] & k = U_4 \arrow[ull, "\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd}$$

Frage: Wie viele verschiedene Konfigurationen erhalten wir, wenn $\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)$ variiert?

Seien $k \ni \alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ und $\left(\begin{smallmatrix}p & q\\x & y\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(k)$ gegeben, sodass diese einen Isomorphismus von Darstellungen des 4-Unterraumköchers wie oben bilden. Also kommutieren die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{tikzcd} k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}p & q\\x & y\end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\ k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\alpha"] & k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}p & q\\x & y\end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\ k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\beta"] & k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}p & q\\x & y\end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\ k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\gamma"] & k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}p & q\\x & y\end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\ k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[r, "\delta"] & k \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix}c\\d\end{smallmatrix}\right)"'] \end{tikzcd}$$

Damit erhalten wir die folgenden Gleichungen.

$$\begin{array}{lclcl}
\begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\alpha & \Rightarrow & \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow & x = 0 \text{ und } p = \alpha \\
\begin{pmatrix} \alpha & q \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\beta & \Rightarrow & \begin{pmatrix} q \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} & \Rightarrow & q = 0 \text{ und } y = \beta \\
\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\gamma & \Rightarrow & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} & \Rightarrow & \alpha = \beta = \gamma \\
\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\delta & \Rightarrow & \gamma\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

Doch dann erzeugen $\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}c\\d\end{smallmatrix}\right)$ dieselbe Gerade, also kann die vierte Gerade nicht durch einen Isomorphismus verändert werden.

Also ist eine “Normalform” für Darstellungen des 4-Unterraumköchers wie oben gegeben durch $\binom{a}{b} = \binom{1}{\lambda}$ mit $\lambda \in k$ oder $\binom{a}{b} = \binom{0}{1}$, d.h. die projektive Gerade $\mathbf{P}^1(k)$ ist ein Parameterraum für Konfigurationen von 4 Geraden in der Ebene.

Noch zu zeigen: Diese Konfigurationen sind unzerlegbar. Dazu bestimme den Endomorphismenring dieser Darstellungen. Wie oben erhalten wir

$$\begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix} = \gamma \,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma \in k.$$

Also ergibt sich End $= k$, d.h. die Darstellungen sind alle unzerlegbar.

2.4 Proposition *Sei* $\dim kQ < \infty$ *und* $Q_0 = \{1, \ldots, n\}$*. Dann sind* $S(1), \ldots, S(n)$ *bis auf Isomorphie genau alle einfachen kQ-Moduln, wobei*

$$S(i)_j = \begin{cases} k & \textit{für } j = i \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}.$$

Jedes $M \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$ *mit* $M \neq 0$ *hat mindestens ein solches* $S(i)$ *als Teilmodul.*

Beweis. Sei $M \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$ mit $M \neq 0$. Definiere den *Träger* von M als

$$\mathrm{Supp}(M) = \{i \in Q_0 : M(i) \neq 0\}.$$

Da $\dim kQ < \infty$ besitzt Q keine zyklischen Wege und da $M \neq 0$ gibt es ein $i_0 \in \mathrm{Supp}(M)$, von dem kein Pfeil in ein $j \in \mathrm{Supp}(M)$ weggeht.

Doch dann ist $S(i) \subseteq M$ ein Teilmodul. Ist M nun einfach, so $S(i) \simeq M$.

Zudem ist für $i \neq j$ stets $S(i) \not\simeq S(j)$, da $\mathrm{Hom}(S(i), S(j)) = 0$. □

Bemerkung Der Beweis zeigt zudem: Für ein beliebiges $M \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$ mit $M \neq 0$ gibt es ein $i \in Q_0$ mit $S(i) \subseteq M$ als Teilmodul. Ist nun $M/S(i) \neq 0$, so gibt es ein $j \in Q_0$ mit $S(j) \subseteq M/S(i)$ usw.

Ist $\dim M < \infty$, so bricht dies irgendwann ab, d.h. M ist auf diese Weise “zusammengesetzt” aus einfachen Moduln. Sei $\underline{\dim}\, M = (\dim M(i))_{i \in Q_0}$ der Dimensionsvektor von M. Dann kommt in dieser Reihe $S(i)$ genau $\dim M(i)$-mal vor.

Beispiele

- Sei $Q = \left(1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2\right)$ der Kroneckerköcher. Für verschiedene $\lambda \in k$ erhalten wir zueinander nicht isomorphe unzerlegbare Darstellungen durch

  $$M(\lambda) := \left(k \underset{\lambda}{\overset{1}{\rightrightarrows}} k\right)$$

  Dann ist $S(2) \subseteq M(\lambda)$ ein Teilmodul und es gilt $M/S(2) \simeq \left(k \rightrightarrows 0\right) = S(1)$. Dabei kommt λ nicht vor, d.h. die einfachen Bausteine $S(1)$ und $S(2)$ allein bestimmen $M(\lambda)$ nicht.

- Sei $Q = \left(1 \circlearrowright \alpha\right)$ der Köcher mit einem Punkt und einem Pfeil.

  Dann ist für jedes $\lambda \in k$ ein einfacher Modul gegeben durch $S(\lambda) = \left(k \circlearrowright \lambda\right)$.

  Dabei ist $S(\lambda) \simeq S(\mu)$ genau dann, wenn $\lambda = \mu$, denn ein Isomorphismus $S(\lambda) \to S(\mu)$ ist gegeben durch ein $0 \neq a \in k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

  $$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "a"'] & k \arrow[d, "a"] \\ k \arrow[r, "\mu"'] & k. \end{tikzcd}$$

3 Einfache Moduln und Radikale

Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra.

3.1 Proposition

(a) *Sei S ein einfacher A-Linksmodul. Dann existiert ein surjektiver Modulhomomorphismus $\varphi\colon {}_AA \to {}_AS$.*

(b) *Sei $\varphi\colon {}_AA \to {}_AS$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Dann ist* $\operatorname{Kern}(\varphi)$ *ein maximales Linksideal in A.*

(c) *Sei ${}_AI \subseteq {}_AA$ ein maximales Linksideal. Dann ist $S = A/I$ ein einfacher A-Modul.*

Beweis. Zu (a): Nach Proposition 1.19 ist $\operatorname{Hom}_A(A, S) \simeq S$. Wähle $0 \neq x \in S$ und definiere einen Modulhomomorphismus $f\colon A \to S$ durch $1 \mapsto x$.

Dann ist $\operatorname{Im}(f) \subseteq S$ ein Teilmodul mit $\operatorname{Im}(f) \neq 0$. Da S einfach, ist also $\operatorname{Im}(f) = S$ und f ist surjektiv.

Zu (b): Sei $\varphi\colon A \to S$ surjektiv. Sei ${}_AI = \operatorname{Kern}(\varphi) \subsetneq {}_AX \subseteq {}_AA$. Es ist $\varphi({}_AX) \subseteq {}_AS$ ein Teilmodul, also ist wegen S einfach

$$\varphi({}_AX) = \begin{cases} 0, & \text{oder} \\ S \simeq \varphi(A). \end{cases}$$

Allerdings impliziert $\varphi(X) = 0$ stets $X \subseteq I = \operatorname{Kern}(\varphi)$, doch ist $I \subsetneq X$ nach Voraussetzung. Also ist $\varphi(X) = S$. Doch dann ergibt sich

$$A/X \simeq (A/\operatorname{Kern}(\varphi))/(X/\operatorname{Kern}(\varphi)) \simeq \operatorname{Im}(\varphi)/\varphi(X) \simeq S/S \simeq 0,$$

also $A = X$.

Zu (c): Sei ${}_AI \subseteq {}_AA$ ein maximales Linksideal. Sei ${}_AS := {}_AA/{}_AI$ und sei $\varphi\colon A \to S,\ a \mapsto a + I$ die Quotientenabbildung.

Zeige: S ist einfach. Sei $0 \subseteq {}_AX \subseteq {}_AS$. Da φ surjektiv, folgt

$$I = \operatorname{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(X) \subseteq \varphi^{-1}(S) = A.$$

Da nun I maximal in A ist, folgt $\varphi^{-1}(X) = I$ oder $\varphi^{-1}(X) = A$. Also ist

$$X = \varphi(\varphi^{-1}(X)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi^{-1}(X) = I \\ S & \text{falls } \varphi^{-1}(X) = A. \end{cases}$$

Damit ist S einfach. □

3.2 Theorem (Schurs Lemma) 21.11.2016

(a) *Sei ${}_AS$ ein einfacher A-Modul. Dann ist* $\operatorname{End}_A(S)$ *ein Schiefkörper (d.h. jedes $0 \neq \varphi\colon S \to S$ ist invertierbar).*

(b) *Seien ${}_AS$ und ${}_AT$ einfach. Dann gilt:* $\operatorname{Hom}_A({}_AS, {}_AT) \neq 0 \Leftrightarrow S \simeq T$.

Beweis. Zu (a): Sei $\varphi\colon S \to S$ ein Linksmodulhomomorphismus. Es sind $\mathrm{Im}(\varphi)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi)$ Teilmoduln von S, d.h.

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \varphi = 0 \\ S & \Rightarrow \varphi \text{ ist surjektiv} \end{cases} \qquad \mathrm{Kern}(\varphi) = \begin{cases} S & \Rightarrow \varphi = 0 \\ 0 & \Rightarrow \varphi \text{ ist injektiv} \end{cases}.$$

Damit ist $\varphi = 0$ oder φ ist bijektiv, also invertierbar.

Zu (b): Ist $S \simeq T$, so ist wegen $S \neq 0$ stets $\mathrm{Hom}_A(S,T) \neq 0$. Ist dagegen $\mathrm{Hom}_A(S,T) \neq 0$, so gibt es $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_A(S,T)$. Nach (a) ist dies aber ein Isomorphismus, also $S \simeq T$. □

Beispiel Sei $A = kQ$ eine Wegealgebra eines Köchers Q mit $\dim_k A < \infty$.

Nach Proposition 2.4 sind die einfachen kQ-Moduln gegeben durch $S(j)$ für $j \in Q_0$, wobei $S(j)$ ein k an j und 0 sonst stehen hat.

Weiterhin ist $A = \bigoplus_{j \in Q_0} e_j A$, wobei $e_j = e_j^2$ der Weg der Länge 0 ab j ist. Dann ist eine Basis von $e_j A$ gegeben durch alle Wege, die in j starten.

Nun definiere einen surjektiven A-Modulhomomorphismus auf diesen Basiselementen durch

$$\varphi_j\colon e_j A \to S(j),\ e_j \mapsto x \neq 0,\ e_j \neq \alpha \mapsto 0.$$

Indem wir alle Basiselemente aus $\bigoplus_{j \neq i \in Q_0} e_i A$ auf 0 abbilden, setzen wir φ_j zu einem surjektiven A-Modulhomomorphismus $\hat{\varphi}_j\colon A \to S(j)$ fort.

Sei nun $A_{\geq 1} := \langle \text{Wege der Länge} \geq 1 \rangle_k$ der k-lineare Aufspann der Wege von Länge größer gleich 1 in A. Dann ist der Kern von $\hat{\varphi}_j$

$$\mathrm{Kern}(\hat{\varphi}_j) = e_j A_{\geq 1} \oplus \bigoplus_{j \neq i \in Q_0} e_i A.$$

Nach Proposition 3.1 ist dies ein maximales Rechtsideal in A. Nun definiere den A-Modulhomomorphismus

$$\varphi := (\varphi_i)_{i \in Q_0}\colon A = \bigoplus_{i \in Q_0} e_i A \to \bigoplus_{i \in Q_0} S(i).$$

Dann ist auch φ surjektiv mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = A_{\geq 1}$. Zudem ist

$$A/A_{\geq 1} \simeq \bigoplus_{i \in Q_0} S(i)$$

und

$$A_{\geq 1} = \bigcap_{j \in Q_0} \Big(e_j A_{\geq 1} \oplus \bigoplus_{j \neq i \in Q_0} e_i A \Big)$$

ist ein Schnitt von (gewissen) maximalen Rechtsidealen.

3.3 Definition Sei A eine (endlichdimensionale) Algebra. Das *Jacobson-Radikal* von A ist der Durchschnitt aller maximalen Linksideale von A.

$$\mathrm{rad}(A) := \bigcap_{\substack{{}_A I \subseteq_A A \\ \text{maximales} \\ \text{Linksideal}}} {}_A I$$

Diese Definition funktioniert allgemein für Ringe, also $\mathbf{Z}$-Algebren. Mit dem Lemma von Zorn lässt sich die Existenz maximaler Linksideale zeigen.

Beispiele

- Sei $A = \mathbf{Z}$ als $\mathbf{Z}$-Algebra. Dann ist

$$\mathrm{rad}(\mathbf{Z}) = \bigcap_{p \text{ prim}} (p\mathbf{Z}) = (0),$$

insbesondere sind die einfachen $\mathbf{Z}$-Moduln gegeben durch $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

- Sei $A = k$ als k-Algebra. Dann gibt es keine echten Ideale ungleich (0) in A, also ist (0) ein maximales Ideal und es ist $\operatorname{rad}(A) = (0)$.

  Insbesondere ist $A/\operatorname{rad}(A) = k$ einfach.

3.4 Proposition *Für $a \in A$ sind äquivalent.*

(1) *Es ist $a \in \operatorname{rad}(A)$.*

(2) *Es liegt a im Schnitt aller maximalen Rechtsideale, also*

$$a \in \bigcap_{\substack{I_A \subseteq A_A \\ \text{maximales} \\ \text{Rechtsideal}}} I_A.$$

(3) *Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $(1-ab)c = c(1-ab) = 1$.*

(4) *Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $(1-ba)c = c(1-ba) = 1$.*

(5) *Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $(1-ab)c = 1$.*

(6) *Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $c(1-ba) = 1$.*

3.5 Korollar

(a) *Es ist*

$$\operatorname{rad}(A) = \bigcap_{\substack{{}_A I \subseteq {}_A A \\ \text{maximales} \\ \text{Linksideal}}} {}_A I = \bigcap_{\substack{I_A \subseteq A_A \\ \text{maximales} \\ \text{Rechtsideal}}} I_A.$$

(b) *Es ist $\operatorname{rad}(A)$ ein zweiseitiges Ideal in A. Insbesondere ist $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ eine k-Algebra.*

Beweis von Proposition 3.4. Wir zeigen (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (5). Analog ist dann auch (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (6). Danach zeige (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Zu (2) $\Rightarrow$ (5): Sei a im Schnitt aller maximalen Rechtsideale. Sei $b \in A$. Zeige: $1 - ab$ hat ein Rechtsinverses, d.h. $c \in A$ mit $(1-ab)c = 1$.

Angenommen, $1 - ab$ habe kein Rechtsinverses. Dann ist $J_A := (1-ab)A \subsetneq A$ ein echtes Rechtsideal. Also gibt es ein maximales Rechtsideal $I_A \supseteq J_A$. Allerdings liegt a im Schnitt aller maximalen Rechtsideale, also insbesondere $a \in I_A$, somit $a \in J_A$. Damit ist auch $ab \in J_A$. Nach Definition ist $1 - ab \in J_A$, aber dann $ab + (1-ab) = 1 \in J_A$, also $J_A = A$, *Widerspruch.*

Zu (5) $\Rightarrow$ (2): Sei $a \in A$ mit (5). Zeige: a ist im Schnitt aller maximalen Rechtsideale.

Angenommen, es gibt es maximales Rechtsideal I_A mit $a \notin I_A$. Dann ist $I_A \subsetneq I_A + aA$, also $I_A + aA = A$. Also gibt es $x \in I_A$ und $y \in A$ mit $1 = x + ay$. Doch dann hat $x = 1 - ay \in I_A$ ein Rechtsinverses (wähle $b = y$), also ist $I_A = A$, *Widerspruch.*

Zu (3) $\Rightarrow$ (5): Dies ist offensichtlich.

Zu (5) $\Rightarrow$ (3): Sei $a \in A$, sodass $1 - ab$ für alle $b \in A$ ein Rechtsinverses $c \in A$ besitzt. Zeige: Dann ist auch $c(1-ab) = 1$.

Sei also $b \in A$. Dann gibt es $c \in A$, sodass $(1-ab)c = c - abc = 0$. Sei $d := (-bc)$. Dann ist $c = 1 - ad$. Nach (5) gibt es $e \in A$ mit $(1-ad)e = 1$, also $ce = 1$.

Doch dann ist $e - ade = 1$, also $e = 1 + ade = 1 - abce = 1 - ab$, also $c(1-ab) = 1$.

Zu (3) $\Rightarrow$ (4): Sei $a \in A$ mit $b, c \in A$, sodass $c(1-ab) = (1-ab)c = 1$. Zeige: Dann hat auch $(1-ba)$ ein Inverses.

Es ist $(1-ab)c = c - abc = 1$, also

$$(1-ba)(1+bca) = 1 + bca - ba - babca = 1 - ba + b(c - abc)a = 1 - ba + ba = 1$$

und $c(1-ab) = c - cab = 1$, also

$$(1+bca)(1-ba) = 1 + bca - ba - bcaba = 1 - ba + b(c - cab)a = 1 - ba + ba = 1.$$

Der Beweis zu (4) $\Rightarrow$ (3) ist analog. $\square$

Beispiel Sei $e = e^2 \in A$ mit $e \neq 0, 1$ ein Idempotent. Behauptung: $e \notin \operatorname{rad}(A)$.

Es ist auch $1 - e$ ein Idempotent: $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 + e$.

Also ist $A_A = eA \oplus (1-e)A$, denn $e + (1-e) = 1$, $e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$.

Falls $e \in \operatorname{rad}(A)$, wähle $a = e$ und $b = e$, dann ist $ab = e^2 = e$.

Nach Proposition 3.4 ist also $1 - ab = 1 - e$ invertierbar. Also gibt es $c \in A$ mit $(1-e)c = 1$, also $e = e \cdot 1 = e(1-e)c = 0 \cdot c = 0$, *Widerspruch.*

3.6 Korollar

(a) *Für* $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ *gilt* $\operatorname{rad}(\bar{A}) = 0$.

(b) *Sei* $I \subsetneq A$ *ein echtes zweiseitiges Ideal, welches nilpotent ist, d.h. es gelte* $I^n = (0)$ *für eine natürliche Zahl* $n \in \mathbf{N}$.

Dann ist $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$.

Beweis. Zu (a): *Angenommen*, es gibt ein $\bar{a}$ mit $0 \neq \operatorname{rad}(\bar{A}) \ni \bar{a} \neq 0$, sodass $a \in A$ mit $a \notin \operatorname{rad}(A)$, 23.11.2016
wobei $\bar{a}$ das Bild von a unter der Quotientenabbildung $A \twoheadrightarrow \bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ ist.

Nach Proposition 3.4 gibt es ein $b \in A$, sodass $(1-ab)$ kein Linksinverses hat. Also ist $A(1-ab) \neq A$, daher ist $A(1-ab)$ ein echtes Ideal in A, also enthalten in einem maximalen Linksideal $I \subseteq A$. Sei $\bar{I} = I/\operatorname{rad}(A)$. Dann ist $\bar{A}$ ein Ideal in $\bar{A}$. Zudem ist

$$\underbrace{A/I}_{\text{einfach}} \simeq (A/\operatorname{rad}(A))/(I/\operatorname{rad}(A)) = \bar{A}/\bar{I}.$$

Es ist $1 - ab \in I$, also unter $A \twoheadrightarrow \bar{A}$ auch $\bar{1} - \bar{a}\bar{b} \in \bar{I}$. Da $\bar{I} \neq \bar{A}$, hat $\bar{1} - \bar{a}\bar{b}$ kein Linksinverses, doch dann liegt $\bar{a}$ nicht im Radikal von $\bar{A}$, also $\bar{a} \notin \operatorname{rad}(\bar{A})$, *Widerspruch.*

Zu (b): Sei I nilpotent. Dann gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ mit $I^n = (0)$. Seien $a \in I$ und $b \in A$. Zeige: $1 - ab$ hat ein Inverses. Es ist $x := ab \in I$ mit $x^n = 0$ und

$$(1-x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} - x - \ldots - x^{n-1} - x^n = 1.$$

Also hat $1 - ab = 1 - x$ ein Inverses, also ist $a \in \operatorname{rad}(A)$. Daher ist $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$. $\square$

3.7 Definition Sei M ein A-Linksmodul. Der *Annullator* $\operatorname{Ann}_A(M)$ von M ist

$$\operatorname{Ann}_A(M) := \{a \in A : am = 0 \text{ für alle } m \in M\}.$$

3.8 Lemma *Es ist* $\operatorname{Ann}_A(M)$ *ein zweiseitiges Ideal von* A.

Beweis. Seien $a \in \operatorname{Ann}_A(M)$ und $b \in A$. Zeige: $ba \in \operatorname{Ann}_A(M)$ und $ab \in \operatorname{Ann}_A(M)$.

Sei $m \in M$. Es ist $(ba)m = b\underbrace{(am)}_{=0} = 0$ und $(ab)m = a\underbrace{(bm)}_{\in M} = 0$. $\square$

Beispiel Sei ${}_AI$ ein Linksideal in A und $M := A/I$ als A-Linksmodul. Was ist $\operatorname{Ann}_A(A/I)$?

Sei $x \in I$ und $y + I \in A/I$. Dann ist $x(y+I) = xy + I = 0 + X \Leftrightarrow xy \in I$.

Allerdings ist I ein Linksideal, d.h. xy muss nicht in I liegen, d.h. es ist $I \nsubseteq \operatorname{Ann}_A(A/I)$ im Allgemeinen. Falls I ein zweiseitiges Ideal ist, so gilt hingegen $I \subseteq \operatorname{Ann}_A(A/I)$.

Beispiel Sei $A = \mathrm{M}_n(k)$ und betrachte das Linksideal

$$I = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \subseteq A.$$

Dann ist

$$A/I = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ein treuer A-Modul, daher ist $\mathrm{Ann}_A(A/I) = \{0\}$.

3.9 Proposition *Sei $a \in A$. Dann gilt $a \in \mathrm{rad}(A)$ genau dann, wenn $a \in \mathrm{Ann}_A(S)$ für jeden einfachen A-Linksmodul S. Also gilt*

$$\mathrm{rad}(A) = \bigcap_{{}_AS \text{ einfach}} \mathrm{Ann}_A(S).$$

Damit folgt wieder, dass $\mathrm{rad}(A)$ ein zweiseitiges Ideal von A ist.

Beweis. Sei $a \in \mathrm{rad}(A)$ und ${}_AS$ einfach. Sei $x \in S$ mit $x \neq 0$. Zeige: $ax = 0$, d.h. $A(ax) = \{0\}$.

Es ist $A(ax)$ ein Teilmodul von S einfach. Ist also $A(ax) = \{0\}$, so sind wir fertig.

Angenommen, es ist $A(ax) = S$. Dann gibt es ein $b \in A$ mit $x = bax$, d.h. $(1 - ba)x = 0$. Da $a \in \mathrm{rad}(A)$ gibt es $c \in A$ mit $c(1 - ba) = 1$, also

$$0 = c0 = c(1 - ba)x = 1x = x,$$

im *Widerspruch* zu $x \neq 0$. Also ist $A(ax) = 0$.

Umgekehrt, sei a im Schnitt aller Annulatoren von einfachen Linksmoduln. Zeige: $a \in \mathrm{rad}(A)$, d.h. a ist im Schnitt aller maximalen Linksideale.

Angenommen, es gibt ein maximales Linksideal ${}_AI \subseteq {}_AA$ mit $a \notin I$. Es ist aber ${}_AS = A/I$ einfach, daher $a \in \mathrm{Ann}_A(S)$. Also ist $ax = 0$ für alle $x \in A/I = S$.

Insbesondere ist also $a(1 + I) = a + I = 0$, also $a \in I$, im *Widerspruch* zu $a \notin I$. □

3.10 Definition Sei M ein A-Linksmodul. Das *Radikal* von M, bezeichnet mit $\mathrm{rad}(M)$, ist der Durchschnitt aller maximalen Teilmoduln von M

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{\substack{N \subsetneq M \\ \text{maximal}}} N.$$

3.11 Proposition *Es ist*

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{\substack{p\colon M \to S \\ S \text{ einfach}}} \mathrm{Kern}(p).$$

Beweis. Es ist $N \subsetneq M$ maximal genau dann, wenn M/N einfach ist. □

Beispiele

- Ist M einfach, so gilt $\mathrm{rad}(M) = \{0\}$.
- Ist $M = S_1 \oplus S_2$ mit S_1, S_2 einfach. Dann ist mit den Projektionen auf die beiden Summanden

  $$S_1 = \mathrm{Kern}(p_2\colon M \twoheadrightarrow S_2) \quad \text{und} \quad S_2 = \mathrm{Kern}(p_1\colon M \twoheadrightarrow S_1).$$

  Also ist $\mathrm{rad}\, M \subseteq S_1 \cap S_2 = \{0\}$, also $\mathrm{rad}\, M = \{0\}$.

3.12 Theorem

(a) *Sei $M \in A$-*`mod`*. Dann ist* $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$ *genau dann, wenn M halbeinfach ist, d.h. es gibt eine Zerlegung $M \simeq S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ für $S_1, \ldots, S_n$ einfach, eventuell mit Wiederholung.*

(b) *Es ist ${}_A\bar{A} = {}_A(A/\operatorname{rad}(A))$ halbeinfach und jeder einfache A-Modul ${}_AS$ ist isomorph zu einem direkten Summanden von ${}_A\bar{A}$.*

(c) *Bis auf Isomorphie gibt es nur endlich viele einfache A-Moduln.*

Beispiel Sei $A = kQ$ eine Wegealgebra mit $\dim_k kQ < \infty$. Sei $Q_0 = \{1, \ldots n\}$. Dann ist $A/A_{\geq 1} \simeq S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$.

Da $A_{\geq 1}$ nilpotent ist, folgt mit Korollar 3.6, dass $A_{\geq 1} \subseteq \operatorname{rad}(A)$ gilt.

Nach Theorem 3.12 enthält $A/\operatorname{rad}(A) = \bar{A}$ stets $S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ als direkten Summanden. Damit folgt aber $\operatorname{rad}(A) \subseteq A_{\geq 1}$, also ist

$$\operatorname{rad}(A) = A_{\geq 1}.$$

Beweis von Theorem 3.12. Zu (a): Sei ${}_AM$ ein Linksmodul mit $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$.

Zeige: $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ für einfache Moduln $S_1, \ldots, S_n$. Da $\dim M < \infty$, hat M einfache Teilmoduln. Zeige also: Die einfachen Teilmoduln von M sind direkte Summanden.

Dazu sei $S_1 \subseteq M$ einfach. Da $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$ ist $S_1 \nsubseteq \operatorname{rad}(M)$. Also existiert ein $p\colon M \to T$ mit $p \neq 0$ und T einfach, sodass $S_1 \nsubseteq \operatorname{Kern}(p)$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, hook, "i=\text{incl.}"] \arrow[rr, bend right, "ip\neq 0"'] & M \arrow[r, "p"] & T \end{tikzcd}$$

Nach Schurs Lemma (Theorem 3.2) ist $ip\colon S_1 \to T$ also ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, hook, "i=\text{incl.}"] \arrow[rr, bend right, "\text{id}"'] & M \arrow[r, "p'=p(ip)^{-1}"] & S_1 \end{tikzcd}$$

Damit ist $M = S_1 \oplus \operatorname{Kern}(p')$. Ist nun $\operatorname{Kern}(p') = \{0\}$, so sind wir fertig. Ist $\operatorname{Kern}(p') \neq \{0\}$, so wähle einfachen Modul $S_2 \subseteq \operatorname{Kern}(p')$ wie oben, usw. Da $\dim_k M < \infty$, folgt damit, dass M halbeinfach ist.

Sei umgekehrt M halbeinfach mit $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ und $S_1, \ldots, S_n$ einfach. Dann ist aber

$$\operatorname{rad}(M) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Kern}(p_i\colon S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \twoheadrightarrow S_i) = \{0\},$$

also $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$.

Zu (b): Sei $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ und ${}_AS$ einfach. Da $\operatorname{rad}(A) \subseteq \operatorname{Ann}_A(S)$ ist S auch ein einfacher $\bar{A}$-Modul. Umgekehrt ist jeder $\bar{A}$-Modul auch ein A-Modul, also sind die einfachen A-Moduln genau die einfachen $\bar{A}$-Moduln.

Nach Korollar 3.6 ist $\operatorname{rad}(\bar{A}) = 0$, also gibt es nach (a) eine Zerlegung $\bar{A} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ in einfache Moduln S_i.

Ist nun T einfach, so gibt es eine surjektive Abbildung $\bar{A} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \twoheadrightarrow T$. Doch dann gibt es ein i, sodass sich die Abbildung einschränkt zu einer Abbildung $S_i \to T$ ungleich 0, welche nach Schurs Lemma ein Isomorphismus ist.

Zu (c): Folgt unmittelbar aus (b), da $\dim \bar{A} < \infty$. □

3.13 Lemma *Für $X, Y \in A$-*`mod` *gilt* 28.11.2016

$$\operatorname{rad}(X \oplus Y) = \operatorname{rad}(X) \oplus \operatorname{rad}(Y).$$

Beweis. Sei $p\colon X \oplus Y \to S$ einfach mit $p \neq 0$. Schreibe $p = (p_1, p_2)$ mit $p_1\colon X \to S$ und $p_2\colon Y \to S$.

Dann ist $\operatorname{Kern}(p_1) \subseteq X$ ein maximaler Teilmodul von X und $\operatorname{Kern}(p_2) \subseteq Y$ ein maximaler Teilmodul von Y. Also ist $\operatorname{rad}(X) \subseteq \operatorname{Kern}(p_1)$ und $\operatorname{rad}(Y) \subseteq \operatorname{Kern}(p_2)$, also gilt

$$\operatorname{rad}(X \oplus Y) = \bigcap_{p\colon X\oplus Y \to S} \operatorname{Kern}(p) \supseteq \bigcap_{p\colon X\oplus Y \to S} \operatorname{Kern}(p_1) \oplus \operatorname{Kern}(p_2) \supseteq \operatorname{rad}(X) \oplus \operatorname{rad}(Y).$$

Für die Gegenrichtung sei $p\colon X \to S$ mit $p \neq 0$ und S einfach. Dann ist $(p, 0)\colon X \oplus Y \to S$ auch ein A-Modulhomomorphismus, also ist $\operatorname{rad}(X) \oplus Y \supseteq \operatorname{rad}(X \oplus Y)$. Analog erhalten wir $X \oplus \operatorname{rad}(Y) \supseteq \operatorname{rad}(X \oplus Y)$. Also ist

$$\operatorname{rad}(X) \oplus \operatorname{rad}(Y) = ((\operatorname{rad}(X) \oplus Y) \cap (X \oplus \operatorname{rad}(Y))) \supseteq \operatorname{rad}(X \oplus Y). \qquad \square$$

3.14 Lemma *Sei $f \in \operatorname{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$. Dann gilt*

$$f(\operatorname{rad}(X)) \subseteq \operatorname{rad}(Y).$$

Beweis. Sei $u \in \operatorname{rad}(X)$. Zeige: $f(u) \in \operatorname{rad}(Y)$.

Sei $p\colon Y \to S$ mit $p \neq 0$ und S einfach. Dann ist $q = fp\colon X \to S$. Da $u \in \operatorname{rad}(X)$, ist $q(u) = p(f(u)) = 0$, also ist $f(u) \in \operatorname{Kern}(p)$, daher $f(u) \in \operatorname{rad}(X)$. $\square$

Bemerkung Nach Lemma 3.14 induziert jeder Homomorphismus $f\colon X \to Y$ einen Homomorphismus $\bar{f}\colon X/\operatorname{rad}(X) \to Y/\operatorname{rad}(Y)$.

3.15 Lemma *Sei $X \in A$-$\texttt{mod}$. Dann ist $X/\operatorname{rad}(X)$ halbeinfach.*

Beweis. Nach Proposition 1.19 ist $\operatorname{Hom}_A({}_AA, {}_AX) \simeq {}_AX$. Durch Wahl von Erzeugern von X erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $f\colon A^n \twoheadrightarrow X$.

Dieser induziert einen Homomorphismus $\bar{f}\colon A^n/\operatorname{rad}(A^n) \twoheadrightarrow X/\operatorname{rad}(X)$. Nach Lemma 3.13 ist $A^n/\operatorname{rad}(A^n) \simeq (A/\operatorname{rad}(A))^n = \bar{A}^n$. Nach Theorem 3.12 ist ${}_A\bar{A}$ als Modul halbeinfach, daher ist $\bar{A} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_\ell$ mit einfachen Moduln S_i. Sei nun S einfach mit $X/\operatorname{rad}(X) \twoheadrightarrow S$. Dies gibt einen surjektiven Homomorphismus

$$S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \oplus S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \oplus \ldots \twoheadrightarrow X/\operatorname{rad}(X) \twoheadrightarrow S.$$

Dann gibt es aber ein i mit $S_i \xrightarrow{\neq 0} S$. Nach Schurs Lemma ist dies aber ein Isomorphismus $S_i \to S$, daher ist S_i ein direkter Summand von $X/\operatorname{rad}(X)$. Da $X \in A$-$\texttt{mod}$ folgt die Aussage nun per Induktion. $\square$

3.16 Theorem (Nakayamas Lemma) *Seien $X, Y, M \in A$-$\texttt{mod}$ und $f \in \operatorname{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$. Dann gilt*

(a) *Es ist $f\colon X \to Y$ surjektiv genau dann, wenn $\bar{f}\colon X/\operatorname{rad}(X) \to Y/\operatorname{rad}(Y)$ surjektiv ist.*

(b) *Es ist $\operatorname{rad}(A) \cdot M = M$ genau dann, wenn $M = \{0\}$ ist.*

Beweis. *Zu* (a): Sei $f\colon X \to Y$ surjektiv. Betrachte das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads, "\text{quot.}"] & Y \arrow[d, two heads, "\text{quot.}"] \\ X/\operatorname{rad}(X) \arrow[r, two heads, "\bar{f}"] & Y/\operatorname{rad}(Y) \end{tikzcd}$$

Wir erkennnen, dass auch $\bar{f}$ surjektiv ist.

Sei umgekehrt $\bar{f}\colon X/\operatorname{rad}(X) \to Y/\operatorname{rad}(Y)$ surjektiv.

Sei $u \in Y$, sei $\bar{u} \in Y/\operatorname{rad}(Y)$ die Restklasse von u. Dann gibt es ein $v \in X$ mit $\bar{f}(\bar{v}) = \bar{u}$, wobei $\bar{v} \in X/\operatorname{rad}(X)$ die Restklasse von v ist. Damit ist $f(v) \in u\operatorname{rad}(Y)$, also ist $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{rad}(Y) = Y$.

Angenommen, es wäre $\operatorname{Im}(f) \subsetneq Y$. Dann gibt es aber einen maximalen Teilmodul $Z \subsetneq Y$ mit $\operatorname{Im}(f) \subseteq Z \subsetneq Y$, also ist $\operatorname{rad}(Y) \subseteq Z$. Doch dann ist $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{rad} Y) \subseteq Z \subsetneq Y$, *Widerspruch*. Also ist $\operatorname{Im}(f) = Y$.

Zu (b): Sei $M \neq 0$. *Annahme*: $\operatorname{rad}(A) \cdot M = M$.

Nach Voraussetzung ist $\dim M < \infty$. Daher gibt es endlich viele Erzeuger $m_1, \ldots, m_n \in M$. Wähle $n > 0$ minimal.

Sei $m \in M$. Dann gibt es $a_1(m), \ldots, a_n(m) \in A$ mit $m = a_1(m)m_1 + \ldots + a_n(m)m_n$. Nun ist aber auch

$$M = \operatorname{rad}(A) \cdot M = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} b_j p_j : b_j \in \operatorname{rad}(A), p_j \in M, \ell \in \mathbf{N} \right\},$$

daher erhalten wir, dass

$$m = \sum_{j=1}^{\ell} b_j(m) p_j(m) \text{ wobei } b_j \in \operatorname{rad}(M) \text{ und } M \ni p_j(m) = a_1(p_j)m_1 + \ldots + a_n(p_j)m_n.$$

Somit ist

$$m = \sum_{k=1}^{n} c_k(m) m_k \text{ wobei } c_k(m) \in \operatorname{rad}(A).$$

Nun wähle $m = m_1$. Dann ist $m = 1m_1$, aber auch $m = c_1 m_1 + \ldots + c_n m_n$ mit $c_j \in \operatorname{rad}(A)$. Also ist

$$(1 - c_1)m_1 = c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n.$$

Wegen $c_1 \in \operatorname{rad}(A)$ ist $1 - c_1$ invertierbar, daher

$$m_1 = \frac{1}{1 - c_1}(c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n),$$

im *Widerspruch* zur Minimalität von n. □

3.17 Korollar *Es ist* $\operatorname{rad}(A)$ *das eindeutig größte nilpotente Ideal in* A.

Beweis. Nach Korollar 3.6 ist jedes nilpotente Ideal von A enthalten in $\operatorname{rad}(A)$. Es bleibt zu zeigen: $\operatorname{rad}(A)$ ist nilpotent.

Es ist stets $A \supsetneq \operatorname{rad}(A)$. Ist nun $\operatorname{rad}(A) = 0$, so sind wir fertig. Ist $\operatorname{rad}(A) \neq 0$, so gilt mit Theorem 3.16 stets $\operatorname{rad}(A) \supsetneq \operatorname{rad}(A) \cdot \operatorname{rad}(A) = \operatorname{rad}(A)^2$.

Ist nun $\operatorname{rad}(A)^2 = 0$, so sind wir fertig, falls nicht betrachte $\operatorname{rad}(A)^2 \supsetneq \operatorname{rad}(A)^3$ usw. Da $\dim A < \infty$, muss irgendwann $\operatorname{rad}(A)^n = 0$ gelten. □

3.18 Proposition *Sei* $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$. *Dann ist* $\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(A) \cdot M$.

Beweis. Sei $m \in M$. Dann gibt es $f\colon A \to M$ mit $f(1) = m$. Nach Lemma 3.14 gilt $f(\operatorname{rad}(A)) \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Andererseits ist

$$f(\operatorname{rad}(A)) = f(\operatorname{rad}(A) \cdot 1) = \operatorname{rad}(A) \cdot f(1) = \operatorname{rad}(A) \cdot m,$$

also $\operatorname{rad}(A) \cdot M \subseteq \operatorname{rad}(M)$.

Zur Umkehrung: Wegen $\operatorname{rad}(A) \cdot M \subseteq \operatorname{rad}(M)$ gibt es den surjektiven Homomorphismus $M/(\operatorname{rad}(A) \cdot M) \twoheadrightarrow M/\operatorname{rad}(M)$.

Behauptung: $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad}(A)\cdot M)=0$, d.h. $M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)$ ist halbeinfach.

Dazu sei S einfach und $0\neq p\colon M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)\to S$. Wähle $0\neq f\colon A\to S$. Sei $0\neq x\in A$ und wähle $y\in p^{-1}(x)$. Setze $g\colon A\to M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M), 1\mapsto y$. Dann ist

$$g(\operatorname{rad}(A))=\operatorname{rad}(A)\cdot g(1)=\operatorname{rad}(A)y\in\operatorname{rad}(A)\cdot M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)=0.$$

Also ist $g(\operatorname{rad}(A))=0$. Damit gibt es den Homomorphismus $\bar g\colon A/\operatorname{rad}(A)\to M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)$, also auch $\bar f\colon A/\operatorname{rad}(A)\to S/(\operatorname{rad}(A)\cdot S)=S$. Da aber $A/\operatorname{rad}(A)$ halbeinfach ist, gibt es ein i mit $0\neq\bar f S_i\to S$, mit Schurs Lemma folgt erneut, dass S_i ein direkter Summand von $M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)$ ist.

Wegen $\dim M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)<\infty$ folgt die Behauptung nun per Induktion.

Nun betrachte die Quotientenabbildung $M\twoheadrightarrow M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)$. Diese hat $\operatorname{rad}(M)$ im Kern, also gibt es die surjektive Abbildung $M/\operatorname{rad}(M)\twoheadrightarrow M/(\operatorname{rad}(A)\cdot M)$. Aus Dimensionsgründen folgt also $\operatorname{rad}(M)=\operatorname{rad}(A)\cdot M$. □

Bemerkung Für $M\in A\text{-}\mathtt{mod}$ und $\ell\in\mathbf{N}$ schreiben wir 30.11.2016

$$\operatorname{rad}^\ell(M):=\operatorname{rad}(A)^\ell\cdot M.$$

3.19 Korollar *Seien $X,Y\in A\text{-}\mathtt{mod}$.*

(a) *Gilt $X\subseteq Y$, so auch $\operatorname{rad}(X)\subseteq\operatorname{rad}(Y)$.*

(b) *Es gibt ein $n\in\mathbf{N}$ mit $\operatorname{rad}^n(X)=0$.*

Beweis. Zu (a): Es ist $\operatorname{rad}(X)=\operatorname{rad}(A)\cdot X\subseteq\operatorname{rad}(A)\cdot Y=\operatorname{rad}(Y)$.

Zu (b): Es ist $\operatorname{rad}^n(X)=\operatorname{rad}(A)^n\cdot X$ mit $\operatorname{rad}(A)$ nilpotent nach Korollar 3.17. □

3.20 Definition Eine endlichdimensionale Algebra B heißt *halbeinfach* (als Algebra), genau dann, wenn der reguläre Modul ${}_BB$ halbeinfach ist (als Modul).

3.21 Theorem (Satz von Wedderburn und Artin) *Die halbeinfachen k-Algebren sind, bis auf Isomorphie, genau die Algebren der Form*

$$A\simeq\bigoplus_{j=1}^{\ell}\mathrm{M}_{n_j}(D_j)$$

für $\ell\in\mathbf{N}$, $n_1,\dots,n_\ell\in\mathbf{N}$ und Schiefkörper $D_1,\dots,D_\ell$, welche endlichdimensionale Erweiterungen von k sind. Dabei ist die Zerlegung eindeutig bis auf Reihenfolge.

Außerdem hat A bis auf Isomorphie genau ℓ einfache Moduln $S_1,\dots,S_\ell$, wobei $S_j\simeq D_j^{n_j}$, d.h. es ist $\dim_k S_j=n_j[D_j:k]$, und $D_j=\operatorname{End}_A(S_j)$.

Bemerkung Ist A kommutativ und halbeinfach, so ist $A\simeq\bigoplus_{j=1}^{\ell}k_j$, wobei k_j Körpererweiterungen von k sind (*Satz von Weierstrass und Dedekind*).

Beweis von Theorem 3.21. Algebren der Form $A=\bigoplus_{j=1}^{\ell}\mathrm{M}_{n_j}(D_j)$ sind halbeinfach (Übung).

Sei nun A eine Algebra mit $\operatorname{rad}({}_AA)=\{0\}$. Also gibt es einfach Moduln S_i mit ${}_AA\simeq S_1\oplus\ldots\oplus S_n$, ordnen wir diese nach Isomorphieklassen ergibt sich

$${}_AA\simeq S_1^{n_1}\oplus\ldots\oplus S_\ell^{n_\ell}.$$

Berechne nun die Algebra A als $\operatorname{End}_A(A)=\operatorname{Hom}_A(S_1^{n_1}\oplus\ldots\oplus S_\ell^{n_\ell},S_1^{n_1}\oplus\ldots\oplus S_\ell^{n_\ell})$.

nach Schurs Lemma (Theorem 3.2) gilt $\operatorname{Hom}(S_j,S_k)=0$ für $j\neq k$, daher ist schließlich $\operatorname{End}({}_AA)\simeq\bigoplus_{j=1}^{\ell}\operatorname{End}_A(S_j^{n_j})\simeq\bigoplus_{j=1}^{\ell}\mathrm{M}_{n_j}(D_j)$, wobei $D_j=\operatorname{End}_A(S_j)$ ein Schiefkörper ist nach Theorem 3.2.

Noch zu zeigen ist die Eindeutigkeit der Zerlegung. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Zerlegung eines halbeinfachen Moduls in einfache Moduln (bis auf Reihenfolge) eindeutig ist.

Sei $S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell} \simeq T_1^{p_1} \oplus \ldots \oplus T_m^{p_m}$ zwei Zerlegungen in einfache Moduln. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_A(S_1, S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell}) \simeq \mathrm{Hom}_A(S_1, T_1^{p_1} \oplus \ldots \oplus T_m^{p_m}). \tag{$*$}$$

Nach Schurs Lemma ist die linke Seite isomorph zu $\mathrm{Hom}_A(S_1, S_1^n) \simeq \mathrm{Hom}_A(S_1, S_1)^n = D_1^n$.

Weiterhin gibt Schurs Lemma für die rechte Seite $\mathrm{Hom}(S_1, T_j) = 0$ außer für ein j, ohne Einschränkung sei $\mathrm{Hom}(S_1, T_1) \neq 0$. Außerdem gilt $S_1 \simeq T_1$, daher gilt $\mathrm{Hom}(S_1, T_1) \simeq \mathrm{End}_A(S_1) = D_1$. Dann ist die rechte Seite in $(*)$ isomorph zu $\mathrm{Hom}(S_1, T_1^{p_1}) \simeq \mathrm{Hom}(S_1, T_1)^{p_1} \simeq D_1^{p_1}$.

Es folgt $p_1 = n_1$. Induktiv folgt außerdem $\ell = m$ und nach Umsortierung $n_i = p_i$ für alle i, d.h. die Zerlegung ist bis auf Reihenfolge eindeutig. $\square$

4 Kategorien und Funktoren

4.1 Definition Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ von *Objekten*, einer Klasse $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ von *Morphismen* (hier sind $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ disjunkt), wobei jeder Morphismus $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ zu einem geordneten Paar (X, Y) von Objekten gehört, wir schreiben $f\colon X \to Y$. Alle Morphismen der Form $f\colon X \to Y$ bilden die Menge (dies ist eine Voraussetzung!) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Weiterhin ist eine partielle Verknüpfung, genannt *Komposition*, $\operatorname{Mor}\mathcal{C} \times \operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ gegeben, die definiert ist für $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Wir schreiben für $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ dann $fg\colon X \to Z$ für die Komposition dieser beiden Morphismen.

Diese Daten erfüllen die folgenden Eigenschaften.

- Die Komposition ist assoziativ, d.h. es gilt $(fg)h = f(gh)$ für $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ und $h\colon Z \to W$ in $\mathcal{C}$.
- Für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $1_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, genannt *Identität* auf X, welcher $1_X f = f$ und $g 1_X = g$ für alle $f\colon X \to Y$ und $g\colon W \to X$ in $\mathcal{C}$ erfüllt.

Bemerkung Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

- Objekte müssen keine Mengen sein, genauso wenig muss die Klasse von Objekten eine Menge sein (siehe Beispiele weiter unten).
- Der Fall $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \emptyset$ für $X \neq Y$ ist möglich.
- Die Identität 1_X ist eindeutig: Sei auch $1'_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ eine Identität. Dann gilt $1_X = 1'_X 1_X = 1'_X$.

Beispiele

- Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ der Mengen mit $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ als Klasse (dies ist eine echte Klasse) aller Mengen und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Menge aller Mengenabbildungen von X nach Y.

  Die Komposition ist die übliche Hintereinanderausführung von Abbildungen und die Identität ist die übliche identische Abbildung.
- Sei A ein Ring. Dann ist $\mathcal{C} = A\text{-}\mathtt{Mod}$ die Kategorie der A-Moduln mit $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ als Klasse aller A-Linksmoduln und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Menge aller A-Linksmodulhomomorphismen von X nach Y.
- Ebenso erhalten wir die Kategorie $\mathcal{C} = \mathtt{Group}$ der Gruppen, wobei die Objektklasse alle Gruppen enthält und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen von X nach Y ist.
- Sei G eine Gruppe. Dann ist eine Kategorie gegeben durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{G\}$, d.h. $\mathcal{C}$ hat nur ein Objekt und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G) = G$. Die Komposition ist dann die Multiplikation in G und die Identität auf G ist das neutrale Element in G.
- Sei $\mathcal{C} = Q$ ein Köcher. Dann ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = Q_0$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Menge aller Wege der Länge ≥ 0 von X nach Y. Die Komposition ist die Verkettung von Wegen, die Identität auf X ist der Weg der Länge der 0 auf X.

Zum Beispiel ist für den Köcher

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
& 2 \arrow[r, "\beta"] & 4 \\
3 \arrow[ur, "\gamma"] & &
\end{tikzcd}$$

nun $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{1,2,3,4\}$ und zum Beispiel $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(1,1) = \{e_1\}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(1,4) = \{\alpha\beta\}$, aber $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(4,1) = \emptyset$.

- Sei $\mathcal{C} = \texttt{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume, d.h. die Objektklasse enthält alle topologischen Räume und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ enthält alle stetigen Abbildungen von X nach Y.
- Sei X ein topologischer Raum. Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}$ durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = X$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1,x_2)$ als Menge aller Homotopieklassen von stetigen Wegen in X von x_1 nach x_2.
- Die Kategorie k-$\texttt{Vect}$ der k-Vektorräume über einem Körper k mit linearen Abbildungen 05.12.2016
  als Morphismen.

  Für eine k-Algebra A erhalten wir die Teilkategorie A-$\texttt{Mod} \subseteq k$-$\texttt{Vect}$ der A-Moduln mit A-Modulhomomorphismen als Morphismen. Hierbei heiße eine Kategorie $\mathcal{C}'$ *Teilkategorie* einer Kategorie $\mathcal{C}$, falls $\operatorname{Ob}\mathcal{C}' \subseteq \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle Objekte $X,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$.

  Weiterhin erhalten wir die volle Teilkategorie A-$\texttt{mod} \subseteq A$-$\texttt{Mod}$ der endlichdimensionalen A-Moduln mit A-Modulhomomorphismen als Morphismen. Dabei heiße eine Teilkategorie $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ *voll*, falls $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle Objekte $X,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$.
- Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit topologischen Räumen als Objektklasse und Inklusionen als Morphismen.
- Sei X ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie mit Teilräumen $Y \subseteq X$ (mit der Teilraumtopologie) als Objektklasse und Inklusionen als Morphismen. Beachte, dass hier jede Hom-Menge höchstens ein Element besitzt.
- Sei $M \in A$-$\texttt{mod}$ und betrachte die Kategorie $\operatorname{add} M \subseteq A$-$\texttt{mod}$ als volle Teilkategorie mit Objektklasse gegeben durch direkte Summanden von M^n, d.h. $X \in \operatorname{Ob}(\operatorname{add} M)$ genau dann, wenn $X \mid M^n$ für ein $n \in \mathbf{N}$.
- Sei $M \in A$-$\texttt{Mod}$ und betrachte die Kategorie $\operatorname{Add} M \subseteq A$-$\texttt{Mod}$ als volle Teilkateogire mit Objektklasse gegeben durch direkte Summanden von beliebigen direkten Summen von M, d.h. $X \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Add} M)$ genau dann, wenn $X \mid \bigoplus_{i \in I} M$ für eine Indexmenge I.

4.2 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X,Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ heißt *Endomorphismus* von X, schreibe $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$.
- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt *Isomorphismus* (kurz *iso*), falls es $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ gibt mit $fg = 1_X$ und $gf = 1_Y$.
- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt *Monomorphismus* (kurz *mono*), falls für $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und beliebige $u,v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ aus $uf = vf$ stets $u = v$ folgt.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt *Epimorphismus* (kurz *epi*), falls für $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $u,v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ beliebig aus $fu = fv$ stets $u = v$ folgt.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

Beispiele (für Monomorphismen)

- 1_X ist Monomorphismus: $u1_X = v1_X \Rightarrow u = v$.
- Jeder Isomorphismus $f\colon X \to Y$ ist ein Monomorphismus: Sei $g\colon Y \to X$ mit $fg = 1_X$ und $gf = 1_Y$. Dann ist $uf = vf \Rightarrow ufg = vfg \Rightarrow u = v$.
- Sei $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ die Kategorie der Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen.

  Sei Z eine Menge und $u, v\colon Z \to X$ mit $uf = vf$. Falls f injektiv, so gilt für alle $z \in Z$ stets $zuf = zuv \Rightarrow zu = zv$, also $u = v$. Damit:

  $$f \text{ injektiv } \Rightarrow f \text{ mono.}$$

  Ein ähnliches Argument funktioniert für alle Kategorien, bei denen Morphismen Abbildungen zwischen Mengen sind.

  Für die Gegenrichtung: Sei $f\colon X \to Y$ mono. Annahme: f nicht injektiv. Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, aber $x_1 f = x_2 f$.

  Definiere $Z = \{z\}$. Definiere Abbildungen $u, v\colon Z \to X$ durch $zu = x_1$ und $zv = x_2$. Dann ist $u \neq v$, aber $uf = vf$, im Widerspruch zu f mono.

  Insgesamt gilt also in $\mathtt{Set}$:

  $$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ mono.}$$

- Sei $\mathcal{C} = A\text{-}\mathtt{Mod}$. Dann gilt f injektiv $\Rightarrow f$ mono wie in $\mathtt{Set}$.

  Für die Rückrichtung sei f mono. Annahme: f ist nicht injektiv. Dann ist $Z := \operatorname{Kern}(f) \neq 0$. Sei $u\colon Z \hookrightarrow X$ die Einbettung von Z in X und $0 = v\colon Z \to X$ die Nullabbildung. Dann gilt $u \neq v$ aber $uf = vf$, im Widerspruch zu f mono.

  Insgesamt gilt also in $A\text{-}\mathtt{Mod}$:

  $$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ mono.}$$

- Sei $\mathcal{C} = Q$ ein Köcher, $f\colon X \to Y$ ein Weg zwischen Punkten $X, Y \in Q_0$. Sind $u, v\colon Z \to X$ Wege von Z nach X, so sind uf, vf Wege von Z nach Y.

  Gilt nun $uf = vf$ als Gleichheit von Wegen, so ist $u = v$, also ist jeder Morphismus ein mono (und auch epi), aber nur 1_Z für $Z \in Q_0$ ist ein Isomorphismus.
- Betrachte den Köcher $1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Falls in $\mathcal{C}$ außer 1_X kein Morphismus in X ankommt, so ist jedes in X startende f ein mono.
- Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ mono. Dann ist auch fg mono, denn für $u, v\colon W \to X$ gilt

  $$u(fg) = v(fg) \Rightarrow (uf)g = (vf)g \overset{g \text{ mono}}{\Rightarrow} uf = vf \overset{f \text{ mono}}{\Rightarrow} u = v.$$

- Sei $\mathcal{C}$ gegeben durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{$zusammenhängende topologische Räume mit Basispunkt$\}$ und $\operatorname{Mor}\mathcal{C} = \{$stetige Abbildungen, die Basispunkt auf Basispunkt abbilden$\}$.

  Sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ eine Überlagerung. Dann ist f surjektiv, also epi, aber f ist nicht injektiv. Seien $u, v\colon Z \to X$ mit $uf = vf$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Hochhebungen aus der Topologie folgt jedoch $u = v$, also ist f ein mono.

  Also: f mono und epi, surjektiv, aber nicht injektiv und kein Isomorphismus.

Beispiele (für Epimorphismen)

- Es sind alle Isomorphismen und alle Identitäten 1_X Epimorphismen.
- Sei $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ die Kategorie der Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen.

  Sei Z eine Menge und $u, v\colon Y \to Z$ mit $fu = fv$. Falls f surjektiv ist, so gibt es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $y = xf$ und damit $xfu = xfv \Rightarrow yu = yv \Rightarrow u = v$. Also gilt

  $$f \text{ surjektiv } \Rightarrow f \text{ epi.}$$

Ein ähnliches Argument funktioniert für alle Kategorien, bei denen Morphismen Abbildungen zwischen Mengen sind.

Für die Gegenrichtung: Sei $f\colon X \to Y$ epi. Annahme: f nicht surjektiv. Dann gibt es ein $y \in Y$ mit $y \notin f(X)$. Setze $Z := \{1,2,3\}$ und definieren $u, v\colon Y \to Z$ durch

$$yu = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in f(X) \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad yv = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in f(X) \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist für alle $x \in X$ stets $xfu = 1$ und $xfv = 1$, also $fu = fv$, aber $yu = 2 \neq 3 = yv$, also $u \neq v$, im Widerspruch zu f epi.

Insgesamt gilt also in `Set`:

$$f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ epi.}$$

- Sei $\mathcal{C} = A$-`Mod`. Dann gilt f surjektiv $\Rightarrow f$ epi wie in `Set`.

  Für die Rückrichtung sei f epi. Annahme: f ist nicht surjektiv. Dann ist $Z = Y/\operatorname{Im}(f) \neq 0$. Sei $u\colon Y \to Z$ die Quotientenabbildung und $0 = v\colon Y \to Z$ die Nullabbildung. Dann ist $u \neq v$ aber $fu = fv$, im Widerspruch zu f epi.

  Insgesamt gilt also in A-`Mod`:

  $$f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ epi.}$$

- Sei $\mathcal{C} =$ `Ring` die Kategorie der Ringe mit $1 \neq 0$ und einserhaltenden Ringhomomorphismen. Sei $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ die Inklusion. Dann ist f injektiv (also mono) und epi, aber nicht surjektiv.

  Sei R ein Ring und seien $u, v\colon \mathbf{Q} \to R$ Ringhomomorphismen mit $fu = fv$. Für $n \in \mathbf{Z}$ gilt dann $nu = nfu = nfv = nv$. Zudem ist wegen $n\frac{1}{n} = 1$ nun

  $$1 = 1u = u(n)u(\tfrac{1}{n}) \text{ und } 1 = 1v = v(n)v(\tfrac{1}{n})$$

  und wegen $u(n) = v(n)$ also auch $u(\frac{1}{n}) = v(\frac{1}{n})$. Doch damit ist für alle $\frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$ stets $u(\frac{n}{m}) = u(n)u(\frac{1}{m}) = v(n)v(\frac{1}{m}) = v(\frac{n}{m})$, also $u = v$.
- Bijektiv muss nicht gleich iso sein: Sei X eine Menge und sei $X_1 = (X, T_1)$ mit diskreter Topologie T_1 und $X_2 = (X, T_2)$ mit indiskreter Topologie T_2.

  Dann ist $\mathrm{id}_X\colon X_1 \to X_2$ stetig, aber $\mathrm{id}_X\colon X_2 \to X_1$ nicht stetig für $|X| > 1$, also kein Morphismus in der Kategorie der topologischen Räume.

4.3 Definition Sei I eine Menge und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie $\mathcal{C}$.

(a) Ein Objekt X heißt *Produkt* der $\{X_i\}_{i\in I}$, falls es Morphismen $\{\pi_i\colon X \to X_i\}_{i\in I}$ gibt, sodass für alle Objekte Y und Morphismen $\{f_i\colon Y \to X_i\}_{i\in I}$ es genau einen Morphismus $f\colon Y \to X$ gibt mit $f_i = f\pi_i$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Bezeichnung: $X = \prod_{i\in I} X_i$ oder für $I = \{1, \dots, n\}$ auch $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

(b) Ein Objekt X heißt *Coprodukt* der $\{X_i\}_{i\in I}$, falls es Morphismen $\{\iota_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$ gibt, sodass für alle Objekte Y und Morphismen $\{f_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ es genau einen Morphismus $f\colon X \to Y$ gibt mit $f_i = \iota_i f$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists! f"'] \\ Y & X_i \arrow[l, "f_i"] \arrow[u, "\iota_i"'] \end{tikzcd}$$

Bezeichnung: $X = \coprod_{i\in I} X_i$ oder $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ oder für $I = \{1, \dots, n\}$ auch $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$.

Bemerkung Wir betrachten den Fall $I = \emptyset$. 07.12.2016

- Für das Produkt X erhalten wir die Bedingung, dass es für alle Objekte $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ genau einen Morphismus $f \colon Y \to X$ gibt. So ein Objekt X heißt *terminales* Objekt in $\mathcal{C}$.
- Für das Coprodukt X erhalten wir Bedingung, dass es für alle Objekte $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ genau einen Morphismus $f \colon X \to Y$ gibt. So ein Objekt X heißt *initiales* Objekt in $\mathcal{C}$.

Beispiele

- Betrachte die Kategorie $\mathcal{C} = \texttt{Set}$ der Mengen.

  Initiales Objekt: Es ist $X = \emptyset$ initial, da es für jede Menge Y genau eine Abbildung $X = \emptyset \to Y$ gibt.

  Terminales Objekt: Jede einelementige Menge $X = \{x\}$ ist terminal, da es für jede Menge Y genau eine Abbildung $f \colon Y \to X$ gibt, die durch $y \mapsto x$ für $y \in Y$ gegeben ist.

  Beachte, dass X nicht eindeutig ist, aber je zwei einelementige Mengen, also terminale Objekte, in $\texttt{Set}$ isomorph sind.

  Sei nun $I \neq \emptyset$ und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Mengen.

  Produkte: Sei $X = \{(x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i\}$ das kartesische Produkt der X_i. Wir behaupten, dass X ein Produkt der X_i in der Kategorie $\texttt{Set}$ ist.

  Dazu definiere die Projektionsabbildungen für $i \in I$ durch $\pi_i \colon X \to X_i, (x_i)_{i\in I} \mapsto x_i$.

  Für eine Menge Y und Abbildungen $f_i \colon Y \to X_i$ suche nun eine Abbildung $f \colon Y \to X$ mit $f\pi_i = f_i$ für alle $i \in I$. Für $y \in Y$ ist aber $yf\pi_i = yf_i$, also muss $yf = (yf_i)_{i\in I}$ sein. Damit ist so ein eindeutiges f gefunden.

  Also ist ein Produkt in $\texttt{Set}$ tatsächlich durch das kartesische Produkt gegeben.

  Coprodukte: Sei $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ die disjunkte Vereinigung der X_i. Wir behaupten, dass X ein Coprodukt der X_i in der Kategorie $\texttt{Set}$ ist.

  Dazu sei $\iota_i \colon X_i \to X$ die Inklusionsabbildung.

  Für eine Menge Y und Abbildungen $f_i \colon X_i \to Y$ suche nun eine Abbildung $f \colon X \to Y$ mit $\iota_i f = f_i$ für alle $i \in I$. Für $x \in X$ gibt es aber genau ein $i \in I$ mit $x = x_i \in X_i$, also $x = x_i\iota_i$. Also muss $xf := x_i f_i$ gesetzt werden. Damit ist so ein eindeutiges f gefunden.

  Also ist ein Coprodukt in $\texttt{Set}$ tatsächlich durch die disjunkte Vereinigung gegeben.

- Betrachte die Kategorie $\mathcal{C} = A\text{-}\texttt{Mod}$ der A-Moduln über einer k-Algebra A.

  Sei also $I \neq \emptyset$ und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln.

  Produkt: Auf dem kartesischen Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ ist eine A-Modulstruktur gegeben durch $a(x_i)_{i\in I} := (ax_i)_{i\in I}$ und $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} := (x_i + y_i)_{i\in I}$, für $a \in A$ und $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in X$.

  Sei $\pi_i \colon X \to X_i$ die Projektionsabbildung wie in $\texttt{Set}$. Dann ist π_i ein A-Modulhomomorphismus für $i \in I$ und wie in $\texttt{Set}$ erhalten wir, dass X ein Produkt der X_i ist.

  Coprodukt: Sei $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$ die direkte Summe der A-Moduln X_i, d.h. $(x_i)_{i\in I} \in X$ mit $x_i \in X_i$ und nur endlich vielen Einträgen ungleich 0.

  Wieder ist die A-Modulstruktur komponentenweise erklärt. Definiere nun Abbildungen ι_i durch

$$\iota_i \colon X_i \to X,\ x_i \mapsto (y_j)_{j\in I} \text{ mit } y_j = \begin{cases} x_i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x_i \iota_i \in X$ schreibe auch einfach x_i, d.h. für $x = (x_i)_{i \in I}$ schreibe $x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$, wobei $0 \neq x_{i_j} \in X_{i_j}$.

Für einen A-Modul Y und A-Modulhomomorphismen $f_i \colon X_i \to Y$ suche nun $f \colon X \to Y$ mit $\iota_i f = f_i$. Da f ein Homomorphismus sein muss, gilt für $X \ni x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$

$$f(x) = f(x_{i_1}) + \ldots + f(x_{i_n}) := f_{i_1}(x_{i_1}) + \ldots + f_{i_n}(x_{i_n}).$$

Damit ist so ein eindeutiges f gefunden. Also ist das Coprodukt in A-`Mod` durch die direkte Summe gegeben.

4.4 Lemma *Falls in einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Familie $\{X_i\}_{i \in I}$ von Objekten ein Produkt X besitzt, dann ist X eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus (analog für Coprodukt).*

Beweis. Seien $X = \prod_{i \in I} X_i$ und $Z = \prod_{i \in I} X_i$ zwei Produkte. Aus den folgenden beiden Diagrammen, wobei wir beim ersten Diagramm nutzen, dass X ein Produkt ist und beim zweiten Diagramm, dass Z ein Produkt ist, definieren wir Morphismen f und g.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\exists! g"] \arrow[r, "\lambda_i"'] & X_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "\lambda_i"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Dann kommutieren auch die folgenden beiden Diagramme.

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dd, "\pi_i"] \\ & Z \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\ X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[rr, "\pi_i"'] & & X_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & & Z \arrow[dd, "\lambda_i"] \\ & X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ Z \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "\lambda_i"'] & & X_i \end{tikzcd}$$

Allerdings sind auch die folgenden beiden Diagramme kommutativ.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ X \arrow[ur, dashed, "1_X"] \arrow[r, "\pi"'] & X_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "\lambda_i"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "1_Z"] \arrow[r, "\lambda_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Da nun X und Z Produkte sind, folgt aus der Eindeutigkeit des universellen Pfeils in der Definition, dass $gf = 1_X$ und $fg = 1_Z$, d.h. X und Z sind isomorph mit f und g eindeutig bestimmt. $\square$

4.5 Definition (a) Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *additiv*, falls das Folgende gilt.

- Für alle Objekte $X_1, \ldots, X_n \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ existiert die direkte Summe $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.
- Für alle $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ ist $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ eine abelsche Gruppe (additiv geschrieben). Wir bezeichnen das neutrale Element mit $0_{X,Y} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
- Die Komposition von Morphismen ist bilinear: Für $f, f_1, f_2 \colon X \to Y$ und $g, g_1, g_2 \colon Y \to Z$ gilt
$$(f_1 + f_2)g = f_1 g + f_2 g \quad \text{und} \quad f(g_1 + g_2) = f g_1 + f g_2.$$
- Es gibt ein Objekt $0 \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ (genannt *Nullobjekt*) mit $1_0 = 0_{00} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$.

(b) Sei k ein Körper. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *k-Kategorie*, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein k-Vektorraum ist für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und Komposition k-bilinear ist.

Bemerkung

- Sei $\mathcal{C}$ additiv. Dann ist das Nullobjekt initial, terminal und eindeutig (bis auf Isomorphismus).

  Für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist, da $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X)$ eine abelsche Gruppe ist, stets $0_{0X} \colon 0 \to X$ und für $f \colon 0 \to X$ ist $f = 1_0 f = 0_{00} f = (0_{00} - 0_{00}) f = 0_{00} f - 0_{00} f = 0_{0X}$. Analog zeigt man, dass 0 terminal ist.

  Für Eindeutigkeit sei auch $0'$ ein Nullobjekt in $\mathcal{C}$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_{00'}"] \arrow[rr, bend right, "0_{00}=1_0"'] & 0' \arrow[r, "0_{0'0}"] \arrow[rr, bend left, "0_{0'0'}=1_{0'}"] & 0 \arrow[r, "0_{00'}"] & 0'
\end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq 0'$$

- Sei $\mathcal{C}$ eine k-Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann ist $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ eine k-Algebra, wobei Multiplikation durch Komposition gegeben ist.

Beispiel Modulkategorien über k-Algebren sind additive k-Kategorien.

4.6 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und sei $f \colon X \to Y$ ein Morphismus.

(a) Ein *Kern* von f ist ein Paar $(\mathrm{Kern}(f), u)$, welches aus einem Objekt $\mathrm{Kern}(f)$ und einem Morphismus $u \colon \mathrm{Kern}(f) \to X$ besteht, mit den folgenden Eigenschaften.

- Es gilt $uf = 0$.
- Für alle $h \colon Z \to X$ mit $hf = 0$ gibt es genau ein $g \colon Z \to \mathrm{Kern}(f)$ mit $gu = h$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "f"'] & & \\
& \mathrm{Kern}(f) \arrow[ul, "u"'] \arrow[dl, "0"] & Z \arrow[l, dashed, "\exists! g"'] \arrow[ull, bend right, "h"'] \arrow[dll, bend left, "0"] \\
Y & &
\end{tikzcd}$$

(b) Ein *Cokern* von f ist ein Paar $(\mathrm{Cokern}(f), v)$, welches aus einem Objekt $\mathrm{Cokern}(f)$ und einem Morphismus $v \colon X \to \mathrm{Cokern}(f)$ besteht, mit den folgenden Eigenschaften.

- Es gilt $fv = 0$.
- Für alle $h \colon Y \to Z$ mit $fh = 0$ gibt es genau ein $g \colon \mathrm{Cokern}(f) \to Z$ mit $vg = h$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "0"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
& \mathrm{Cokern}(f) \arrow[r, dashed, "\exists! g"] & Z \\
Y \arrow[ur, "v"'] \arrow[urr, bend right, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Kern und Cokern sind, falls existent, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beispiele

- Sei $\mathcal{C} = A\text{-}\mathtt{Mod}$ und $f \colon X \to Y$ ein A-Modulhomomorphismus.

  Kern: Sei $K = \{x \in X : xf = 0\}$. Zeige: $(K, u = \mathrm{incl} \colon K \to X)$ ist ein Kern von f.

Es ist K ein A-Linksmodul und es gilt $uf = 0$. Sei nun $h\colon Z \to X$ gegeben mit $hf = 0$. Dann gilt für alle $z \in Z$ stets $zhf = 0$, also $zh \in K$.

Definiere $g\colon Z \to K$ durch $zg = zh$. Dann ist $h = gu$ und g ist dadurch eindeutig bestimmt.

Cokern: Sei $C = Y/\operatorname{Im}(f)$ und sei $v\colon Y \to C$ die Restklassenabbildung. Zeige: (C, v) ist ein Cokern von f.

Es ist C ein A-Linksmodul und es gilt $fv = 0$. Sei nun $h\colon Y \to Z$ gegeben mit $fh = 0$. Dann ist $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(h)$, also ist $g\colon C = Y/\operatorname{Im}(f) \to Z$, $y + \operatorname{Im}(f) \mapsto yh$ wohldefiniert mit $h = vg$ und g ist dadurch eindeutig bestimmt.

Insgesamt hat in A-`Mod` also jeder Morphismus einen Kern und einen Cokern.

- Sei $\mathcal{C} = \texttt{Group}$ die Kategorie der Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. 12.12.2016

  Dann existiert ein Kern zu f, welcher gegeben ist durch $\operatorname{Kern}(f) = \{g \in G : gf = 1_H\}$ und $u = \operatorname{incl}\colon \operatorname{Kern}(f) \hookrightarrow G$.

  Für den Cokern sei
  $$\langle f(G) \rangle = \bigcap_{f(G) \subseteq N \trianglelefteq H} N$$
  der kleinste Normalteiler von H, der das Bild von f enthält. Dann existiert auch ein Cokern von f, welcher gegeben ist durch $\operatorname{Cokern}(f) = H/\langle f(G) \rangle$ und der Quotientenabbildung $v\colon H \twoheadrightarrow H/\langle f(G) \rangle$.

Ist $(\operatorname{Kern}(f), u)$ ein Kern eines Morphismus f in einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$, so schreibe auch $\operatorname{Kern}(f) := u$ für den zugehörigen kanonischen Morphismus, analog für Cokerne.

4.7 Proposition *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $f\colon X \to Y$. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{Kern}(f)$ *ist ein Monomorphismus.*

(b) f *ist ein Monomorphismus genau dann, wenn* $\operatorname{Kern}(f) = 0$.[1]

Eine analoge Aussage gilt auch für Cokerne und Epimorphismen.

Beweis. *Zu* (a): Sei $u := \operatorname{Kern}(f)$ der kanonische Morphismus. Seien ein Objekt Z in $\mathcal{C}$ und Morphismen $a, b\colon Z \to \operatorname{Kern}(f)$ gegeben mit $au = bu$.

Sei $c := au = bu$. Dann ist $cf = auf = a0 = 0$, also gibt es ein eindeutiges $d\colon Z \to \operatorname{Kern}(f)$ mit $c = du$. Aus der Eindeutigkeit folgt $d = a = b$, also $a = b$. Somit ist u mono.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
Z \arrow[u, shift left, "b"'] \arrow[u, shift right, "a"] \arrow[u, dashed, bend left, "\exists! d"] \arrow[ur, "c"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Zu (b): Sei $\operatorname{Kern}(f) = 0$. Zeige: f ist mono.

Seien ein Objekt Z und Morphismen $a, b\colon Z \to X$ gegeben mit $af = bf = 0$. Zeige: $a = b$, also $a - b = 0$. Allerdings ist $(a - b)f = 0$, also gibt es ein eindeutiges $g\colon Z \to \operatorname{Kern}(f)$ mit $(a - b) = g0 = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern}(f) = 0 \arrow[r, "u=0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& Z \arrow[ul, dashed, "\exists! g"] \arrow[u, "a-b"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

[1] d.h. es gilt sowohl für das Objekt $\operatorname{Kern}(f) = 0$ als auch für den kanonischen Morphismus $\operatorname{Kern}(f) = 0$

Sei nun f mono. Zeige $(\mathrm{Kern}(f), u) = (0, 0)$.

Es ist $uf = 0 = 0f$, also mit f mono auch $u = 0$.

Sei $1 := 1_{\mathrm{Kern}(f)}$ und $0 := 0_{\mathrm{Kern}(f)}$. Dann ist $1u = 1 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0 = 0u$, also mit u mono nach (a) auch $1 = 0$, also $\mathrm{Kern}(f) = 0$. $\square$

Bemerkung Was ist $\mathrm{Im}(f)$?

In den Kategorien k-`Vect` für einen Körper k oder A-`Mod` für eine k-Algebra A sei ein Morphismus $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann gibt es Kern $(\mathrm{Kern}(f), u)$ und Cokern $(\mathrm{Cokern}(f) = Y/\mathrm{Im}(f), v)$ und es gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &\simeq X/\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Cokern}(u) = \mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f))\\ \mathrm{Im}(f) &\simeq \mathrm{Kern}(v) = \mathrm{Kern}(\mathrm{Cokern}(f)).\end{aligned}$$

Hoffnung: Es gilt stets $\mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f)) \simeq \mathrm{Kern}(\mathrm{Cokern}(f))$, sofern Kerne und Cokerne in einer additiven Kategorie existieren. Dann ist das die Definition des Bildes eines Morphismus.

Sei nun $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Sei $(\mathrm{Kern}(f), u)$ ein Kern von f und $(\mathrm{Cokern}(f), v)$ ein Cokern von f, sei $(\mathrm{Cokern}(u), p)$ ein Cokern von u und $(\mathrm{Kern}(v), i)$ ein Kern von v.

Gesucht ist: Ein Morphismus $g\colon \mathrm{Cokern}(u) \to \mathrm{Kern}(v)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! a"] & Y \arrow[r, "v"] & \mathrm{Cokern}(f) \\
& \mathrm{Cokern}(u) \arrow[r, dashed, "\exists! g"] & \mathrm{Kern}(v) \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Wegen $fv = 0$ gibt es ein eindeutiges $a\colon X \to \mathrm{Kern}(v)$ mit $f = ai$. Es ist $0 = uf = uai$, also auch $0i = 0 = uai$. Es ist i als Kern jedoch mono, also ist auch $ua = 0$.

Doch dann gibt es ein eindeutiges $g\colon \mathrm{Cokern}(u) \to \mathrm{Kern}(v)$ mit $a = pg$. Damit erhalten wir das gesuchte g.

Problem: Dieses g muss kein Isomorphismus sein.

4.8 Definition Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *abelsch*, wenn $\mathcal{C}$ additiv ist und jeder Morphismus $f\colon X \to Y$ einen Kern und Cokern besitzt und g (wie oben definiert) ein Isomorphismus $g\colon \mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f)) \to \mathrm{Kern}(\mathrm{Cokern}(f))$ ist.

Dann ist das *Bild* von f definiert als $\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f))$.

Nach Konstruktion von g oben haben wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[r, "v"] & \mathrm{Cokern}(f) \\
& \mathrm{Cokern}(u) \arrow[r, "g", "\sim"'] & \mathrm{Kern}(v) \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $f = pgi$ mit p, pg epi und i, gi mono, d.h. in abelschen Kategorien faktorisiert jeder Morphismus f in $f = (\mathrm{epi}) \cdot (\mathrm{mono})$.

Beispiele Beispiele für abelsche Kategorien sind k-`Vect` für einen Körper k, A-`mod` für eine k-Algebra A mit $\dim_k A < \infty$ und Kategorien von Garben in der Topologie oder algebraischen Geometrie.

Theorem (Mitchells Einbettungssatz) *Jede abelsche Kategorie ist eine volle Teilkategorie einer Modulkategorie.*

Deshalb darf man in abelschen Kategorien mit Elementen rechnen.

4.9 Definition Eine (endliche oder unendliche) Folge von Objekten und Morphismen

$$\dots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots$$

in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *exakte Sequenz*, falls für alle $n \in \mathbf{Z}$ stets $\mathrm{Im}(f_n) = \mathrm{Kern}(f_{n-1})$ gilt.

Beispiele

- Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \xrightarrow{0} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{0} 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz*. Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(0) &= \mathrm{Kern}(f), \text{ also ist } f \text{ mono.} \\ \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Kern}(g), \text{ also ist } fg = 0. \\ \mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Kern}(0), \text{ also ist } g \text{ epi.} \end{aligned}$$

- Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \xrightarrow{0} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{0} 0$$

bedeutet, dass $\mathrm{Im}(0) = \mathrm{Kern}(f)$, also f mono und $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Kern}(0)$, also f epi. Übung: Dann ist f Isomorphismus.

Beispiel Sei A eine k-Algebra und betrachte $\mathcal{C} = A\text{-}\mathtt{Mod}$. Sei $X \subseteq Y$ ein Teilmodul. Dann gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xhookrightarrow{\text{incl}} Y \xrightarrow{\text{quot}} Z \longrightarrow 0.$$

Ist $X = X_1 \oplus X_2$, so gibt es die kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "(1\ 0)"] & X_1 \oplus X_2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[l, bend left, dashed, "\binom{1}{0}"] & X_2 \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "(0\ 1)"] & 0 \end{tikzcd}$$

Allgemein heißt eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[l, bend left, dashed, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

zerfallend oder *split exakt*, falls es ein $h\colon Z \to Y$ gibt mit $hg = 1_Z$. Dann ist $Y \simeq X \oplus Z$ mit f und g als Inklusion und Projektion.

Übung: A ist halbeinfach genau dann, wenn in A-$\mathtt{Mod}$ alle kurzen exakten Sequenzen zerfallen.

4.10 Definition Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien.

Ein *kovarianter Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \ni X \mapsto F(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ und Abbildungen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, sodass $F(1_X) = 1_{F(X)}$ und $F(fg) = F(f)F(g)$ für $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$.

Ein *kontravarianter Funktor* $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \ni X \mapsto G(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ und Abbildungen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto G(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(Y),G(X))$, sodass $G(1_X) = 1_{G(X)}$ und $G(fg) = G(g)G(f)$ für $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$, d.h. G ist ein kovarianter Funktor $G\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ oder $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Beispiele

- Die Identität $\mathrm{id}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ist ein kovarianter Funktor.
- Ein Morphismus in `Cat` ist ein kovarianter Funktor.
- Für $X_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es den konstanten Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, welcher gegeben ist durch $F(X) = X_0$ und $F(f) = 1_{F(X)}$.
- Sei $\mathcal{P}\colon \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$ der Funktor mit $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ auf den Objekten. Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ definiere, um einen kovarianten Funktor zu erhalten:

  $$f \mapsto \hat{f}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X),\ M \mapsto f(M),$$

  und definiere, um einen kontravarianten Funktor zu erhalten

  $$f \mapsto \check{f}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), N \mapsto f^{-1}(N).$$

- Die Fundamentalgruppe gibt einen kovarianten Funktor $\pi_1\colon \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Group}$.
- Sei A eine k-Algebra. Dann ist A eine Kategorie mit einem Objekt und Morphismen $\operatorname{Hom}(A, A) = A$. Diese ist nicht additiv, aber k-linear.

  Ein k-linearer Funktor $A \to k\text{-}\mathtt{Vect}$, also ein Funktor mit $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$, ist dann genau dasselbe wie ein A-Modul.
- Sei Q ein Köcher. Dann ist Q eine Kategorie. Ein Funktor $F\colon Q \to k\text{-}\mathtt{Vect}$ besteht aus 14.12.2016
  k-Vektorräumen $F(i)$ für $i \in Q_0$ und linearen Abbildungen $F(\alpha)\colon F(i) \to F(j)$ für $\alpha \in Q_1$ mit $F(e_i) = \mathrm{id}_{F(i)}$.

  Damit ist ein Funktor $F\colon Q \to k\text{-}\mathtt{Vect}$ genau eine Köcherdarstellung von Q über k.
- Sei A eine k-Algebra und sei $1 = e_1 + \ldots + e_n$ eine orthogonale Zerlegung der 1 in Idempotente. Dann ist $A = \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_i A e_j$.

  Wir erhalten eine Kategorie durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{1, \ldots, n\}$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j) = e_i A e_j$.

  Ein kovarianter Funktor $M\colon \mathcal{C} \to k\text{-}\mathtt{Vect}$ besteht aus Vektorräumen $M(i)$ und für alle $a \in A$ einer linearen Abbildung $M(e_i a e_j)\colon M(i) \to M(j)$.

  Damit ist M das gleich wie ein A-Rechtsmodul mit Zerlegung in direkte Summanden $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M(i)$.

4.11 Definition Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariante Funktoren. Ein Morphismus $\eta\colon F \to G$, *natürliche Transformation* genannt, ist eine Familie von Morphismen $\{\eta_X\colon F(X) \to G(X)\}_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ in $\mathcal{D}$, so das für alle $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{D}$ das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

d.h. es gilt $\eta_X G(f) = F(f)\eta_Y$.

Eine natürliche Transformation η heißt *natürliche Äquivalenz* oder *natürlicher Isomorphismus* oder *funktorieller Isomorphismus* oder *Isotransformation*, wenn η_X für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.

Ein kovarianter Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *Äquivalenz von Kategorien*, wenn es einen kovarianten Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt und natürliche Isomorphismen $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to FG$ und $\theta\colon 1_{\mathcal{D}} \to GF$. Dann heißt G *quasiinvers* zu F und die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen *äquivalent.* Im kontravarianten Fall heißen F und G *Dualitäten.*

Die Kategorie $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ mit Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ als Objektklasse und natürlichen Transformationen zwischen ihnen (mit punktweiser Komposition) heißt *Funktorkategorie.*

Beispiele • Betrachte A-Moduln als k-lineare Funktoren $A \to k$-`Vect`. Seien also $F, G \colon A \to k$-`Vect` und sei $\eta \colon F \to G$ eine natürliche Transformation. Für $a \in \mathrm{Hom}_A(A, A) = A$ gilt dann

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(a)"] & G(A) \arrow[d, "G(a)"] \\ F(A) \arrow[r, "\eta_A"] & G(A). \end{tikzcd}$$

Die Kommutativität bedeutet gerade, dass die k-linear Abbildung η_A zudem ein A-Modulhomomorphismus ist. Damit ist A-`Mod` äquivalent zu $\mathrm{Fun}(A, k\text{-}\mathtt{Vect})$.

- Die k-Dualität $\mathrm{Hom}(-, k)$ ist eine Dualität zwischen A-`mod` und `mod`-A. Beachte, dass dies nur im endlichdimensionalen Fall gilt.
- Algebraische Geometrie kann verstanden als Studium der folgenden Dualität, d.h. kontravarianten Äquivalenz

$$\begin{array}{rrcl} F\colon & \mathtt{AffVar} & \longrightarrow & \mathtt{AffAlg} \\ & \text{Varietät} & \longmapsto & \text{Koordinatenring} \\ & \text{Spektrum} & \longleftarrow\!\shortmid & \text{Kommutative Algebra.} \end{array}$$

- Es sind `Set` und `Card` (die Kategorie der Kardinalzahlen) äquivalente Kategorien.

Bemerkung Können wir eine Kategorie $\mathcal{C}$ immer in eine Funktorkategorie einbetten?

Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Definiere

$$\mathrm{H}^X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) \colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \ni Y \mapsto \mathrm{H}^X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{Set}.$$

Für $f \colon Y \to Z$ in $\mathcal{C}$ definiere

$$\mathrm{H}^X(f) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \colon g \mapsto gf.$$

Dies definiert einen Funktor $\mathrm{H}^X \colon \mathcal{C} \to \mathtt{Set}$, da

$$\mathrm{H}^X(1_Y) \colon g \mapsto g1_Y = g, \text{ also } \mathrm{H}^X(1_Y) = 1_{\mathrm{H}^X(Y)}$$

und für $f_1 \colon Y \to Z$ und $f_2 \colon Z \to W$ für alle $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ gilt

$$\mathrm{H}^X(f_1 f_2)(g) = g f_1 f_2 = \mathrm{H}^X(f_2)(g f_1) = (\mathrm{H}^X(f_1)\mathrm{H}^X(f_2))(g).$$

Daher ist $\mathrm{H}^X \colon \mathcal{C} \to \mathtt{Set}$ ein kovarianter Funktor.

Alternativ erhalten wir einen Funktor $\mathrm{H}_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \colon \mathcal{C} \to \mathtt{Set}$ durch

$$\mathrm{H}_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_X(f) \colon g \mapsto fg.$$

Dieser ist dann kontravariant.

4.12 Theorem (Yonedas Lemma)

(a) *Sei* $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathtt{Set})$ *und* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. *Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathtt{Set})}(\mathrm{H}^X, F) & \xrightarrow{\sim} & F(X) \\ (\eta \colon \mathrm{H}^X \to F) & \longmapsto & \eta_X(1_X). \end{array}$$

(b) *Sei* $G \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathtt{Set})$ *und* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. *Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathtt{Set})}(\mathrm{H}_X, G) & \xrightarrow{\sim} & G(X) \\ (\eta \colon \mathrm{H}_X \to G) & \longmapsto & \eta_X(1_X). \end{array}$$

Bemerkung Wir folgern für $F = \mathrm{H}^Y$ beziehungsweise $F = \mathrm{H}_Y$ für $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\operatorname{Fun}(\mathcal{C},\mathtt{Set})}(\mathrm{H}^X, \mathrm{H}^Y) &\simeq \mathrm{H}^Y(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y)\\ \operatorname{Hom}_{\operatorname{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathtt{Set})}(\mathrm{H}_X, \mathrm{H}_Y) &\simeq \mathrm{H}_Y(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).\end{aligned}$$

4.13 Korollar (Yoneda Einbettungen)

(a) *Die Zuordnung* $X \mapsto \mathrm{H}^X$ *definiert einen volltreuen Funktor* $\mathrm{H}^-\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathtt{Set})$.

(b) *Die Zuordnung* $X \mapsto \mathrm{H}_X$ *definiert einen volltreuen Funktor* $\mathrm{H}_-\colon \mathcal{C} \to \operatorname{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathtt{Set})$.

Bemerkung Yonedas Lemma gilt auch für

- eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ und einem additiven Funktor F nach $\mathtt{Ab}$.
- eine k-lineare Kategorie $\mathcal{C}$ und einem k-linearen Funktor F nach k-$\mathtt{Vect}$.

Man erhält auch entsprechende Yoneda Einbettungen.

Beweis von Theorem 4.12 (a). Der Beweis funktioniert ebenso mit Zusatzstrukturen, siehe Bemerkung oben. 19.12.2016

Zur Injektivität: Sei $\eta \in \operatorname{Hom}(\mathrm{H}^X, F)$ eine natürliche Transformation, d.h. eine Familie von Morphismen $\eta_Y\colon \mathrm{H}^X(Y) \to F(Y)$, sodass für alle $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^X(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathrm{H}^X(f)"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{H}^X(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Damit gilt $F(f)(\eta_X(1_X)) = \eta_Y(\mathrm{H}^X(f)(1_X)) = \eta_Y(1_X \cdot f) = \eta_Y(f)$.

Ist nun auch $\mu \in \operatorname{Hom}(\mathrm{H}^X, F)$ eine natürliche Transformation, so gilt für alle $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ nun $\mu_Y(f) = F(f)(\eta_X(1_X)) = \eta_Y(f)$, d.h. es ist $\mu = \eta$.

Zur Surjektivität: Wähle $\xi \in F(X)$ beliebig. Für $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ setze $\eta_Y(f) := F(f)(\xi)$. Zeige nun, dass $\eta\colon \mathrm{H}^X \to F$ eine natürliche Transformation definiert.

Dazu sei $g\colon Y \to Z$ in $\mathcal{C}$. Wir müssen zeigen, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^X(Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[d, "\mathrm{H}^X(g)"] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
\mathrm{H}^X(Z) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \arrow[r, "\eta_Z"] & F(Z)
\end{tikzcd}$$

Für $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ gilt aber

$$\eta_Z(\mathrm{H}^X(g)(f)) = \eta_Z(fg) = F(fg)(\xi) = F(g)(F(f)(\xi)) = F(g)(\eta_Y(f)).$$

Also ist $\eta_Z \mathrm{H}^X(g) = F(g)\eta_Y$, daher kommutiert das Diagramm und η ist eine natürliche Transformation mit $\eta_X(1_X) = F(1_X)(\xi) = 1_{F(X)}(\xi) = \xi$. $\square$

4.14 Definition Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor.

- Es heißt F *dicht* (engl. *essentially surjective*), falls es für alle Objekte $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ ein $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ gibt mit $F(X) \simeq Y$.
- Es heißt F *treu*, falls für alle $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ die Abbildung $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$, wobei $f \mapsto F(f)$, injektiv ist.

- Es heißt F *voll*, falls für alle $X, Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ die Abbildung $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$, wobei $f \mapsto F(f)$ surjektiv ist.
- Es heißt F *volltreu*, falls F voll und treu ist.

4.15 Theorem *Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor.*

Dann ist F eine Äquivalenz von Kategorien genau dann, wenn F volltreu und dicht ist.

Beweis. Sei F volltreu und dicht. Suche ein Quasiinverses $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ von F.

Sei $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$. Da F dicht ist, gibt es ein $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ mit $Y \simeq F(X)$. Setze $G(Y) := X$. Fixiere einen Isomorphismus $\varphi_Y\colon Y \to F(X)$.

Sei nun $g\colon Y_1 \to Y_2$ in $\mathcal{D}$ mit $G(Y_1) = X_1$ und $G(Y_2) = X_2$. Da F volltreu ist, erhalten wir die Bijektion

$$\begin{array}{rrcl} \Psi\colon & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX_1, FX_2) \\ & f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

Setze nun $G(g) = \Psi^{-1}(\varphi_{Y_1}^{-1} g \varphi_{Y_2}) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2)$. Dann ist G ein Funktor.

Zeige nun: G is quasiinvers zu F. Nach Definition kommutiert für alle $g\colon Y_1 \to Y_2$ das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "\varphi_{Y_1}", "\sim"'] \arrow[d, "g"] & F(X_1) \arrow[r, equal] \arrow[d, "F(f)"] & F(G(Y_1)) \arrow[d, "F(G(g))"] \\ Y_2 \arrow[r, "\varphi_{Y_2}", "\sim"'] & F(X_2) \arrow[r, equal] & F(G(Y_2)) \end{tikzcd}$$

Damit ist $\varphi\colon \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to F \circ G$ ein natürlicher Isomorphismus.

Für $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ ist $\varphi_{F(X)}\colon F(X) \to F(G(F(X)))$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$. Da F volltreu ist, gibt es (mit Ψ wie oben) ein Urbild $\eta_X\colon X \to G(F(X))$ in $\mathcal{C}$. Auch η_X ist dann ein Isomorphismus. Zeige: η ist eine natürliche Transformation. Dazu sei $f\colon X_1 \to X_2$ in $\mathcal{C}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} F(f\eta_{X_2}) = F(f)F(\eta_{X_2}) = F(f)\varphi_{F(X_2)} \\ &= \varphi_{F(X_1)}F(G(F(f))) = F(\eta_{X_1})F(G(F(f))) = F(\eta_{X_1}G(F(f))). \end{aligned}$$

Da F nun volltreu ist, impliziert dies $f\eta_{X_2} = \eta_{X_1}G(F(f))$. Doch dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\eta_{X_1}", "\sim"'] \arrow[d, "f"] & G(F(X_1)) \arrow[d, "G(F(f)"] \\ X_2 \arrow[r, "\eta_{X_2}", "\sim"'] & G(F(X_2)), \end{tikzcd}$$

d.h. $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ ist ein natürlicher Isomorphismus. Damit ist G quasiinvers zu F, d.h. F ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Sei umgekehrt F eine Äquivalenz von Kategorien. Sei $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ quasiinvers zu F und seien $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ und $\varphi\colon \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to F \circ G$ natürliche Isomorphismen.

Damit liefert φ_Y für $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ einen Isomorphismus $Y \to F(G(Y)) = F(X)$ mit $X = G(Y)$, daher ist F dicht.

Seien nun $X_1, X_2 \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$. Für $f\colon X_1 \to X_2$ ist dann $f = \eta_{X_1}(G \circ F)(f)\eta_{X_2}^{-1}$, d.h. es gilt $(G \circ F)(f) = \eta_{X_1}^{-1} f \eta_{X_2}$. Damit ist jedoch die Abbildung $f \mapsto (G \circ F)f$ eine Bijektion, also ist $f \mapsto F(f)$ eine Injektion, also ist F treu.

Umgekehrt erhalte für $Y_2, Y_2 \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$ mit $g\colon Y_1 \to Y_2$ und $g = \varphi_{Y_1}(F \circ G)(g)\varphi_{Y_2}^{-1}$, dass $f \mapsto F(f)$ eine Surjektion ist, also ist F voll.

Insgesamt ist F also volltreu und dicht. $\square$

5 Projektive Moduln und Zerlegungen

Bemerkung Für einen A-Modul X existiert nach Proposition 1.19 der Isomorphismus von A-Moduln $\operatorname{Hom}_A({}_AX, {}_AY) \to X,\ f \mapsto f(1)$, d.h. ein A-Modulhomomorphismus $A \to X$ ist durch seinen Wert auf 1 eindeutig bestimmt. 21.12.2016

Sind nun A-Moduln X und Y, sowie ein surjektiver A-Modulhomomorphismus $\beta\colon Y \to X$ gegeben, so gibt es für jeden A-Modulhomomorphismus $\alpha\colon A \to X$ eine Hochhebung auf Y, d.h. es gibt $\gamma\colon Y \to X$ mit $\alpha = \gamma\beta$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ist $x_0 = \alpha(1)$ und $y_0 \in \beta^{-1}(x_0)$ ein Urbild unter β, so konstruiere γ durch $\gamma(1) = y_0$.

Also hat A eine Hochhebungseigenschaft bezüglich in A startenden Morphismen.

5.1 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $P \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ heißt *projektiv*, falls für alle Morphismen $\alpha\colon P \to X$ und $\beta\colon Y \to X$, wobei β ein Epimorphismus ist, ein $\gamma\colon P \to Y$ existiert mit $\gamma\beta = \alpha$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \end{tikzcd}$$

Beachte, dass projektive Objekte unter Äquivalenzen von Kategorien erhalten bleiben.

Beispiele

- Ist $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie mit einem initialen Objekt P, so ist P projektiv.

  Sind nämlich $\alpha\colon P \to X$ und ein Epimorphismus $\beta\colon Y \to X$ in $\mathcal{C}$ gegeben, so gibt es, da P initial, genau ein $\gamma\colon P \to Y$. Außerdem gibt es genau ein $\delta\colon P \to X$, daher ist $\delta = \alpha$ und $\delta = \gamma\beta$, also $\alpha = \gamma\beta$
- Ist $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ die Kategorie der Mengen, so ist jedes Objekt P projektiv.

  Sind nämlich $\alpha\colon P \to X$ und eine surjektive Abbildung $\beta\colon Y \to X$ gegeben, so wähle für alle $p \in P$ ein Urbild y von $\alpha(p)$ unter β und setze $\gamma(p) = y$.

5.2 Proposition *Sei A-$\mathtt{Proj} \subseteq A$-$\mathtt{Mod}$ die volle Teilkategorie der projektiven A-Moduln, ebenso A-$\mathtt{proj} \subseteq A$-$\mathtt{mod}$ die volle Teilkategorie der endlich erzeugten projektiven A-Moduln.*

(a) *Es ist A-$\mathtt{Proj} = \operatorname{Add} A$.*

(b) *Es ist A-$\mathtt{proj} = \operatorname{add} A$.*

Insgesamt sind also die (endlich erzeugten) projektiven A-Moduln genau die direkten Summanden von (endlich erzeugten) freien A-Moduln.

Beweis. Wir müssen nur (a) zeigen.

Sei P ein projektiver A-Modul. Zeige: $P \mid \bigoplus_{i\in I} A$ für eine Indexmenge I.

Schreibe P als Bild eines Epimorphismus $\beta\colon \bigoplus_{i\in I} A \to P$, zum Beispiel durch $I = P$ und $(a_p)_{p\in P}\beta = \sum_{p\in P} ap$.

Sei $\alpha = \mathrm{id}_P$. Da P projektiv, gibt es ein $\gamma\colon P \to \bigoplus_{i\in I} A$ mit $\gamma\beta = \mathrm{id}_P$, d.h. P ist direkter Summmand von $\bigoplus_{i\in I} A$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\alpha=\mathrm{id}_P"] & \\ \bigoplus_{i\in I} A \arrow[r, "\beta"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Für die Gegenrichtung beachte, dass nach der Bemerkung oben A projektiv ist als A-Modul. Zeige nun: Direkte Summen und Summanden von projektiven Moduln sind wieder projektiv.

Zu *Summen*: Seien $(P_i)_{i\in I}$ projektive A-Moduln. Sei $\beta\colon Y \to X$ ein Epimorphismus. Dann gibt es für jedes $\alpha_i\colon P_i \to X$ ein $\gamma_i\colon P_i \to Y$ mit $\gamma_i\beta = \alpha_i$.

Doch dann gibt es für jedes $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to X$ ein $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to Y$ mit $\gamma\beta = (\gamma_i\beta)_i = (\alpha_i)_i = \alpha$, daher ist auch $\bigoplus_{i\in I} P_i$ projektiv.

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i\in I} P_i \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma=(\gamma_i)_i"'] \arrow[d, "\alpha=(\alpha_i)_i"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Zu *Summanden*: Seien P und Q gegeben mit $P \oplus Q$ projektiv.

Seien $\alpha\colon P \to X$ und ein Epimorphismus $\beta\colon Y \to X$ gegeben. Da $P \oplus Q$ projektiv, gibt es ein $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon P \oplus Q \to Y$ mit $\gamma\beta = (\alpha, 0)$. Doch es ist $\gamma\beta = (\gamma_1, \gamma_2)\beta = (\gamma_1\beta, \gamma_2\beta)$, also auch $\gamma_1\beta = \alpha$. Doch dann ist P projektiv.

$$\begin{tikzcd} & P \oplus Q \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)"'] \arrow[d, "(\alpha,0)"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma_1"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da $\operatorname{Add} A$ aus direkten Summanden von Summen vom projektiven Modul A besteht, folgt damit die Aussage. □

5.3 Korollar *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist halbeinfach (als Algebra).*

(b) *${}_AA$ ist halbeinfach (als Modul).*

(c) $\operatorname{add} A = A\text{-}\mathtt{mod}$.

(d) *Jeder Modul M in A-*`mod` *ist projektiv.*

(Konsequenz: Ist A halbeinfach und A-`mod` $\simeq$ *B-*`mod` *eine Äquivalenz, so ist auch B halbeinfach).*

Beweis. Die Äquivalenz $(a) \Leftrightarrow (b)$ ist Theorem 3.21 und $(c) \Leftrightarrow (d)$ ist Proposition 5.2.

Gilt (a), so ist $\operatorname{rad}(A) = 0$, also für $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$ auch $\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(A) \cdot M = 0$. Also ist M halbeinfach. Da $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A) = A$ ist, ist A bereits direkte Summe von einfachen A-Moduln, und jeder einfache A-Modul taucht als Summand auf. Also enthält $\operatorname{add} A$ alle halbeinfachen A-Moduln, daher ist M in $\operatorname{add} M$. Somit ist $\operatorname{add} A = A\text{-}\mathtt{mod}$.

Gilt umgekehrt (d), so ist auch $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ projektiv als A-Linksmodul. Sei $q\colon A \to \bar{A}$ die Quotientenabbildung. Dann gibt es $\gamma\colon \bar{A} \to A$ mit $\gamma q = \mathrm{id}_{\bar{A}}$, d.h. $\bar{A}$ ist ein direkter Summand von A.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \bar{A} \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\bar{A}}"] & \\
\mathrm{rad}(A) \arrow[r, hook] & A \arrow[r, "q"] & \bar{A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Weiterhin ist dann $A = \bar{A} \oplus \mathrm{rad}(A)$, also $\mathrm{rad}(A) = \mathrm{rad}(\bar{A}) \oplus \mathrm{rad}^2(A)$. Also gilt $\mathrm{rad}(A) = \mathrm{rad}(A)\,\mathrm{rad}(A)$ und Nakayamas Lemma (Theorem 3.16) impliziert nun $\mathrm{rad}(A) = 0$, d.h. A ist halbeinfach. $\square$

5.4 Proposition *Es ist P in A-$\mathtt{mod}$ projektiv genau dann, wenn jede kurze exakte Sequenz der Form*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

zerfällt, d.h. es gibt $h\colon P \to Y$ mit $hg = \mathrm{id}_P$.

Beweis. Ist P projektiv, so gibt es zu $\mathrm{id}_P\colon P \to P$, da g surjektiv, ein $h\colon P \to Y$ mit $hg = \mathrm{id}_P$. Somit zerfällt jede kurze exakte Sequenz.

Sei umgekehrt P in A-$\mathtt{mod}$, sodass jede kurze exakte Sequenz obiger Form zerfällt. Da P endlich erzeugt ist, gibt es einen surjektiven A-Modulhomomorphismus $f\colon A^n \to P$ für ein $n \in \mathbf{N}$. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Kern}(f) \hookrightarrow A^n \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0.$$

Nach Voraussetzung zerfällt diese kurze exakte Sequenz, daher ist $A^n \simeq P \oplus \mathrm{Kern}(f)$. Also ist P ein direkter Summand von A^n und somit projektiv nach Proposition 5.2. $\square$

5.5 Korollar *Für eine endlichdimensionale Algebra A sind äquivalent:*

(a) *Es ist A halbeinfach.*

(b) *Alle kurzen exakten Sequenzen in A-$\mathtt{mod}$ zerfallen.*

5.6 Theorem (Satz von Maschke, 1899) *Sei k ein Körper von Charakteristik $\mathrm{char}\, k = p$. Sei G eine endliche Gruppe.*

Dann ist kG halbeinfach genau dann, wenn $p \nmid |G|$, d.h. wenn $|G|$ in k invertierbar ist.

Bemerkung Damit zerfällt die Darstellungstheorie endlicher Gruppen in zwei Zweige:

Man unterscheidet die *gewöhnliche* Darstellungstheorie im halbeinfachen Fall und die *modulare* Darstellungstheorie.

Beweis von Theorem 5.6. Sei $|G|$ invertierbar in k. Zeige: kG ist halbeinfach, d.h. alle kurzen exakten Sequenzen zerfallen. Sei also

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in kG-$\mathtt{mod}$. Dann ist dies auch eine kurze exakte Sequenz in k-$\mathtt{Vect}$. Dort zerfällt jedoch jede kurze exakte Sequenz, also gibt es eine k-lineare Abbildung $j\colon Z \to Y$ mit $jg = \mathrm{id}_Z$.

Nun definiere

$$\tilde{j}\colon Z \to Y,\ z \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} hj(h^{-1}z).$$

Dann ist $\tilde{j}$ ein Homomorphismus von kG-Moduln, denn für $h_1 \in H$ und $z \in Z$ gilt

$$h_1\tilde{j}(z) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h_1 h j(h^{-1}z) = \frac{1}{|G|}\sum_{h'=h_1h\in G} h' j(h'^{-1}h_1 z) = \tilde{j}(h_1 z),$$

da aus $h' = h_1 h$ nun $h^{-1} = h'^{-1}h_1$ folgt. Weiterhin gilt $\tilde{j}g = \mathrm{id}_Z$, da für $z \in Z$

$$(\tilde{j}g)(z) = g\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} hj(h^{-1}z)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h\,\underbrace{(jg)}_{\mathrm{id}_Z}(h^{-1}z) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} hh^{-1}z = \frac{1}{|G|}\,|G|\,z = z.$$

Somit zerfällt jede Sequenz in kG-`mod`, also ist kG nach Korollar 5.5 halbeinfach.

Sei umgekehrt $|G| = 0$ in k. Wir zeigen $\mathrm{rad}(kG) \neq \{0\}$. Dazu suchen wir ein nichttriviales nilpotentes Ideal in kG.

Setze $x_0 = \sum_{g\in G} g$ und sei $I := \langle x_0\rangle_k$. Dann ist I ein eindimensionaler Unterraum von kG. Für $h \in G$ gilt zudem

$$hx_0 = h\left(\sum_{g\in G} g\right) = \sum_{g'=hg\in G} g' = x_0 = \sum_{g'=gh\in G} g' = \left(\sum_{g\in G} g\right)h = x_0 h,$$

also ist I ein zweiseitiges Ideal in kG. Da aber

$$x_0^2 = \left(\sum_{g\in G} g\right)\left(\sum_{h\in G} h\right) = |G|\left(\sum_{u\in G} u\right) = 0,$$

ist $I^2 = 0$. Also ist $0 \subsetneq I \subseteq \mathrm{rad}(kG)$, daher ist kG nicht halbeinfach. □

5.7 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. 09.01.2017

- Der Morphismus f heißt *Retraktion*, falls es ein $g\colon Y \to X$ gibt mit $gf = \mathrm{id}_Y$. Dann heißt Y ein *Retrakt* von X.
- Der Morphismus f heißt *Coretraktion* (oder *Schnitt*), falls es ein $g\colon Y \to X$ gibt mit $fg = \mathrm{id}_X$.

In abelschen Kategorien nennen wir Retraktionen auch *split epi* und Coretraktionen auch *split mono*.

Bemerkung Es ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn f Retraktion und Coretraktion ist.

5.8 Lemma *Für einen Morphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ sind äquivalent.*

(a) *f ist eine Retraktion.*

(b) *Für alle $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ surjektiv.*

(c) *Es ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ surjektiv.*

Beweis. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Sei f eine Retraktion. Dann gibt es ein $g\colon Y \to X$ mit $gf = \mathrm{id}_Y$. Sei $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $h\colon Z \to Y$. Dann ist $h = h\cdot \mathrm{id}_Y = hgf = (hg)f = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f)(hg)$. Also ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f)$ surjektiv.

Zu (b) $\Rightarrow$ (c): klar.

Zu (c) $\Rightarrow$ (a): Sei $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ das Urbild von id_Y unter der Surjektion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, f)$. Dann ist $gf = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, f)(g) = \mathrm{id}_Y$, also f eine Retraktion. □

5.9 Lemma *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie.*

(a) *Sei $f\colon X \to Y$ eine Retraktion und $g\colon Y \to X$ mit $gf = \mathrm{id}_Y$. Dann ist $fg\colon X \to X$ idempotent, d.h. es gilt $(fg)^2 = fg$.*

(b) *Sei $e\colon X \to X$ idempotent. Seien $i_1 = \mathrm{Kern}(e)\colon X_1 \to X$ und $i_2 = \mathrm{Kern}(\mathrm{id}_X - e)\colon X_2 \to X$ gegeben. Dann ist $X = X_1 \oplus X_2$ mit den beiden Abbildungen i_1 und i_2. Außerdem ist X auch das Produkt von X_1 und X_2.*

Beweis. Ad (a): Es ist $(fg)^2 = (fg)(fg) = f(gf)g = f\,\mathrm{id}_Y\,g = fg$.

Ad (b): Es ist $(\mathrm{id}_X - e)e = e - e^2 = e - e = 0$, genauso $e(\mathrm{id}_X - e) = 0$. Nach der universellen Eigenschaft des Kerns gibt es $p_1\colon X \to X_1$ und $p_2\colon X \to X_2$ mit $\mathrm{id}_X - e = p_1 i_1$ und $e = p_2 i_2$.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_1"] & X \arrow[r, "e"] & X \\
& X \arrow[ul, "\exists! p_1"] \arrow[u, "\mathrm{id}_X - e"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "i_2"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X - e"] & X \\
& X \arrow[ul, "\exists! p_2"] \arrow[u, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

Somit gilt
$$\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X - e + e = p_1 i_1 + p_2 i_2.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
&i_1 p_1 i_1 = i_1(\mathrm{id}_X - e) = i_1 - i_1 e = \mathrm{id}_{X_1} i_1 && \overset{i_1 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_1 p_1 = \mathrm{id}_{X_1}\\
&i_2 p_2 i_2 = i_2 e = i_2(\mathrm{id}_X - (\mathrm{id}_X - e)) = i_2\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{X_2} i_2 && \overset{i_2 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_2 p_2 = \mathrm{id}_{X_2}\\
&i_1 p_2 i_2 = i_1 e = 0 = 0 i_2 && \overset{i_2 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_1 p_2 = 0\\
&i_2 p_1 i_1 = i_2(\mathrm{id}_X - e) = 0 = 0 i_1 && \overset{i_1 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_2 p_1 = 0.
\end{aligned}$$

Damit zeige nun, dass $X = X_1 \oplus X_2$ ein Coprodukt ist. Dazu seien $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ mit $f_1\colon X_1 \to Y$ und $f_2\colon X_2 \to Y$ gegeben.

Zeige, dass es genau ein $f\colon X \to Y$ gibt mit $f_1 = i_1 f$ und $f_2 = i_2 f$.

Eindeutigkeit: Sei $f\colon X \to Y$ gegeben mit den gesuchten Eigenschaften. Dann ist
$$f = \mathrm{id}_X f = (p_1 i_1 + p_2 i_2) f = p_1 i_1 f + p_2 i_2 f = p_1 f_1 + p_2 f_2,$$
d.h. f ist durch f_1 und f_2 eindeutig bestimmt.

Existenz: Setze $f := p_1 f_1 + p_2 f_2$. Dann ist
$$i_1 f = \underbrace{i_1 p_1}_{=\mathrm{id}_{X_1}} f_1 + \underbrace{i_1 p_2}_{=0} f_2 = f_1 \qquad i_2 f = \underbrace{i_2 p_1}_{=0} f_1 + \underbrace{i_2 p_2}_{\mathrm{id}_{X_2}} f_2 = f_2.$$

Damit existiert ein f mit den gewünschten Eigenschaften.

Analog zeige, dass X ein Produkt von X_1 und X_2 ist mit den Abbildungen p_1 und p_2. □

5.10 Korollar *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann entspricht jede Zerlegung $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ genau einer Zerlegung $\mathrm{id}_X = e_1 + \ldots + e_n \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ in paarweise orthogonale Idempotente.*

5.11 Theorem (Projektivisierung) *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und $M \in A$-`mod`. Sei $B := \mathrm{End}_A(M)$. Dann ist der Funktor*
$$\mathrm{Hom}_A(M, -)\colon \operatorname{add} M \to B\text{-}\mathtt{proj}$$
eine Äquivalenz von Kategorien, insbesondere entsprechen Zerlegungen in $\operatorname{add} M$ Zerlegungen in B-`proj`.

Beweis. Es ist $\operatorname{Hom}_A(M, M) = B$ projektiv und für $n \in \mathbf{N}$ auch $\operatorname{Hom}_A(M, M^n) = B^n$ projektiv. Ist $M^n = M_1 \oplus M_2$, so ist $B^n = \operatorname{Hom}_A(M, M_1 \oplus M_2) = \operatorname{Hom}_A(M, M_1) \oplus \operatorname{Hom}_A(M, M_2)$, also auch $\operatorname{Hom}_A(M, M_1)$ projektiv. Daher bildet $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ nach B-`proj` ab.

Für $f \colon M_1 \to M_2$ ist $\operatorname{Hom}_A(M, f) \colon \operatorname{Hom}_A(M, M_1) \to \operatorname{Hom}_A(M, M_2)$ durch $g \mapsto gf$ gegeben. Wegen $\operatorname{Hom}_A(M, M) = B = \operatorname{Hom}_B(B, B)$ ist somit $\operatorname{Hom}_A(M, f)$ volltreu auf M. Mit Summen und Summanden folgt Volltreue wie oben analog.

Nach Theorem 4.15 genügt es also zu zeigen, dass $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ dicht ist. Offensichtlich liegen B und B^n im Bild von $\operatorname{Hom}_A(M, -)$. Es genügt zu zeigen, dass beliebige Summanden von B^n im Bild von $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ liegen.

Sei also $B^n = B_1 \oplus B_2$. Dies korrespondiert zu einer Zerlegung $1_{B^n} = e + (1 - e)$ mit einem Idempotent e. Da f volltreu ist, korrespondiert dies zu einer Zerlgung $1_{M^n} = f + (1 - f)$ mit einem Idempotent f. Doch dies liefert gerade eine Zerlegung $M^n = M_1 \oplus M_2$ mit $\operatorname{Hom}_A(M, M_1) = B_1$. □

5.12 Korollar *Sei $M \in A$-`mod` und $B := \operatorname{End}_A(M)$ wie in Theorem 5.11. Dann gilt:*

$$_AM \text{ ist unzerlegbar } \Leftrightarrow {}_BB \text{ ist unzerlegbar} \Leftrightarrow 0, 1 \text{ sind die einzigen Idempotente in } B.$$

Bemerkung Zerlegungen der 1 in orthogonale Idempotente sind nicht eindeutig.

Betrachte zum Beispiel $k^2 = k \oplus k$. Dann ist $B = \operatorname{End}_k(k^2) = \mathrm{M}_2(k)$.

Wir haben die Zerlegung in orthogonale Idempotente

$$1_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B.$$

Dieser entspricht die Zerlegung von k^2, welche durch

$$k^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben ist. Andererseits gibt es die Zerlegung

$$1_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in B.$$

Dieser entspricht die Zerlegung von k^2, welche durch

$$k^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben ist.

Nun zeige für eine endlichdimensionale k-Algebra A die Eindeutigkeit der Zerlegung in unzerlegbare Moduln in A-`proj`. Dazu betrachte die halbeinfache Algebra $\bar{A} := A/\operatorname{rad}(A)$. 11.01.2017

Wir müssen also Zerlegungen in A-`proj` mit Zerlegungn in $\bar{A}$-`mod` vergleichen. Dazu können wir Idempotente in A mit Idempotenten in $\bar{A}$ vegleichen. Beachte, dass für ein Idempotent $e \in A$ stets $\bar{e} := e + \operatorname{rad}(A) \in \bar{A}$ ein nichttriviales Idempotent ist.

5.13 Lemma *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und sei $I \subseteq A$ ein nilpotentes zweiseitiges Ideal in A. Sei $u \in A$ mit $u - u^2 \in I$, also $\bar{u} = \bar{u}^2$ mit $\bar{u} = u + I$.*

Dann existiert ein Idempotent $e \in A$ mit $u - e \in I$, d.h. $\bar{e} = \bar{u}$ in A/I. In anderen Worten, man kann Idempotente modulo nilpotenter Ideale hochheben.

Insbesondere gibt es für jedes Idempotent $f \in A/\operatorname{rad}(A)$ ein Idempotent $e \in A$ mit $\bar{e} = f$, da $\operatorname{rad}(A)$ *nilpotent ist.*

Beweis. Zu gegebenen $u =: u_1 \in U$ mit $u_1 - u_1^2 \in I$ konstuiere u_2 mit $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$, aber $u_2 - u_2^2 \in I^2$. Führe dies dann induktiv fort. Da I nilpotent, ist dann $u_n - u_n^2 = 0$ für ein $n \in \mathbf{N}$, d.h. $e := u_n$ ist dann das gesuchte Idempotent.

Schreibe $r := u^2 - u \in I$, $u_1 = u$. Schreibe $w := u_2$ und setze $w := u^2 - ur$. Dann ist

$$w = u^2 - 2ur = u + r - 2ur \equiv u \mod I.$$

Weiterhin ist $ur = u(u - u^2) = ru$, und wegen $r \in I$ ist $r^2 \in I^2$. Nun betrachte

$$\begin{aligned} w^2 &= (u + r - 2ur)^2 \\ &= (u+r)^2 - 4(u+r)ur + 4u^2r^2 \\ &= u^2 + 2ur + r^2 - 4u^2r - 4ur^2 + 4u^2r^2 \\ &\equiv u^2 + 2ur - 4u^2r \mod I^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} w &= u^2 - 2ur \\ &= u^2 + 2ur - 4ur \\ &= u^2 + 2ur - 4(u^2 - r)r \\ &= u^2 + 2ur - 4u^2r + 4r^2 \\ &\equiv u^2 + 2ur - 4u^2r \mod I^2 \\ &\equiv w^2 \mod I^2. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Aussage folgt. □

5.14 Theorem *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra.*

(a) *Seien P und Q projektive A-Moduln. Schreibe $\bar{P} := P/\operatorname{rad}(P)$ und $\bar{Q} := Q/\operatorname{rad}(Q)$. Dann gilt $P \simeq Q$ genau dann, wenn $\bar{P} \simeq \bar{Q}$.*

(b) *Die Zuordnung $P \mapsto \bar{P}$ definiert eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von projektiven A-Moduln und Isomorphieklassen projektiver $\bar{A}$-Moduln (und damit Isoklassen von $\bar{A}$-Moduln allgemein). Dabei ist P unzerlegbar genau dann, wenn $\bar{P}$ unzerlegbar ist.*

(c) *Sei P ein projektiver A-Modul. Seien $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_\ell$ Zerlegungen in direkte Summen unzerlegbarer projektiver Moduln. Dann ist $n = \ell$ und nach Umordnung $P_j \simeq Q_j$ für $j = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Ad (a): Sei $f\colon P \to Q$ ein Isomorphismus von A-Moduln. Wegen $\operatorname{rad}(P) = \operatorname{rad}(A) \cdot P$ und $\operatorname{rad}(Q) = \operatorname{rad}(A) \cdot Q$ ist

$$f(\operatorname{rad}(P)) = f(\operatorname{rad}(A) \cdot P) = \operatorname{rad}(A) \cdot f(P) = \operatorname{rad}(A) \cdot Q = \operatorname{rad}(Q).$$

Also ist die Einschränkung $f|_{\operatorname{rad}(P)}^{\operatorname{rad}(Q)}\colon \operatorname{rad}(P) \to \operatorname{rad}(Q)$ wohldefiniert und bijektiv, d.h. f induziert einen Isomorphismus $\bar{f}\colon \bar{P} \to \bar{Q}$.

Sei umgekehrt $g\colon \bar{P} \to \bar{Q}$ ein Isomorphismus. Seien $r\colon P \twoheadrightarrow \bar{P}$ und $s\colon Q \twoheadrightarrow \bar{Q}$ die Quotientenabbildungen. Da P projektiv ist, gibt es $h\colon P \to Q$ mit $hs = rg$ und da Q projektiv ist gibt es $j\colon Q \to P$ mit $jr = sg^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, two heads, "r"] \arrow[ddl, "\exists h"'] & \\ & \bar{P} \arrow[d, "g", "\wr"'] & \\ Q \arrow[r, two heads, "s"] & \bar{Q} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Q \arrow[d, two heads, "s"] \arrow[ddl, "\exists j"'] & \\ & \bar{Q} \arrow[d, "g^{-1}", "\wr"'] & \\ P \arrow[r, two heads, "r"] & \bar{P} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nach Nakayamas Lemma 3.16 sind nun h und j surjektiv. Damit gilt aus Dimensionsgründen $P \simeq Q$.

Ad (b): Die Zuordnung zwischen den Isomorphieklassen ist wohldefiniert und injektiv nach (a). Für die Surjektivität beachte, dass wegen $\mathrm{rad}(P \oplus Q) = \mathrm{rad}(P) \oplus \mathrm{rad}(Q)$ auch $P \oplus Q \mapsto \bar{P} \oplus \bar{Q}$ gilt. Daher ist die Zuordnung additiv. Nach Theorem 3.12 ist jedoch jeder unzerlegbare halbeinfache Modul isomorph zu einem direkten Summanden von $\bar{A}$.

Ad (c): Dies folgt nun direkt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung für halbeinfache Moduln. □

5.15 Theorem (Satz von Krull-Remak-Schmidt) *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$. Dann hat M bis auf Umordnung und Isomorphie eine eindeutige Zerlegung $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ in unzerlegbare direkte Summanden.*

Bemerkung In unserem Zugang zu Theorem 5.15 sind wir über die Projektivisierung von einer Zerlegung $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ zu einer Zerlegung $B = Be_1 \oplus \ldots \oplus Be_n$ des Endomorphismenrings $B = \mathrm{End}_A(M)$ übergegangen. Dort sind wir dann zum halbeinfachen Fall $\bar{B} = \bar{B}e_1 \oplus \ldots \oplus \bar{B}e_n$ übergegangen.

Dies war nötig, da der direkte Weg zum halbeinfachen durch $M \mapsto \bar{M} = M/\mathrm{rad}(M)$ nicht zum Ziel führt: Eine Zerlegung von $\bar{M}$ liefert im Allgemeinen keine Zerlegung von M. Insbesondere ist es möglich, dass $\bar{M}$ zerlegbar, aber M unzerlegbar ist.

Beispiel Betrachte den Köcher $Q = (1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3)$. Betrachte den kQ-Modul mit $k \longrightarrow k \longleftarrow k$ und Identitäten als Pfeile dazwischen. Dann gilt für einen beliebigen kQ-Modulhomomorphismus

$$\begin{tikzcd} M & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "a"] & k \arrow[d, "b"] & k \arrow[l, "1"'] \arrow[d, "c"] \\ M & k \arrow[r, "1"] & k & k \arrow[l, "1"'] \end{tikzcd}$$

mit $a, b, c \in k$ stets $a = b = c$, also ist $\mathrm{End}(M) \simeq k$. Somit ist M unzerlegbar.

Betrachte nun den einfachen kQ-Modul S_2 mit $0 \longrightarrow k \longleftarrow 0$ und den injektiven kQ-Modulhomomorphismus, welcher durch

$$\begin{tikzcd} M & k \arrow[r, "1"] & k & k \arrow[l, "1"'] \\ S_2 \arrow[u] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[u, "0"] & k \arrow[u, "1"] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "0"] \end{tikzcd}$$

gegeben ist. Aus der exakten Sequenz $S_2 \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/S_2$ sehen wir, dass

$$M/S_2 = (k \longrightarrow 0 \longleftarrow k) = (k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0) \oplus (0 \longrightarrow 0 \longleftarrow k) = S_1 \oplus S_3.$$

Damit ist M/S_2 halbeinfach und der größte halbeinfache Quotient von M, daher ist $\mathrm{rad}(M) = S_2$ und $\bar{M} = M/S_2 \simeq S_1 \oplus S_3$.

5.16 Definition Ein Idempotent $0 \neq e = e^2 \in A$ heißt *primitiv*, falls für alle Idempotente $e_1, e_2 \in A$ mit $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ und $e_1 + e_2 = e$ entweder $e_1 = 0$ oder $e_2 = 0$ ist.

Damit ist eine orthogonale Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ in in primitive Idempotente eine Zerlegung, die nicht weiter verfeinert werden kann.

5.17 Theorem *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und seien zwei orthogonale Zerlegungen $1_A = e_1 + \ldots + e_n = f_1 + \ldots + f_\ell$ in primitive Idempotente.*

Dann gilt $n = \ell$ und es gibt ein invertierbares $a \in A$, sodass nach Umordnung $f_j = a^{-1} e_j a$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt.

Beweis. Zu jeder orthogonalen Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ in primitive Idempotente gehört eine Zerlegung ${}_AA = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$ in unzerlegbare A-Moduln, da $\mathrm{End}(Ae_i) = e_iAe_i$ nur das Idempotent e_i hat.

Somit erhalten wir zwei Zerlegungen ${}_AA = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n = Af_1 \oplus \ldots \oplus Af_\ell$ in unzerlegbare direkte Summanden. Nach Theorem 5.15 gilt also $n = \ell$ und nach Umordnung $Ae_i \simeq Af_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei $a_i \in \mathrm{Hom}_A(Ae_i, Af_i) = e_iAf_i$ ein solcher Isomorphismus, $b_i \in \mathrm{Hom}_A(Af_i, Ae_i)$ sein Inverses. Dann gilt für $i, j = 1, \ldots, n$ stets

$$a_ib_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \mathrm{id}_{Ae_i} = e_i & i = j \end{cases} \text{ und } b_ia_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \mathrm{id}_{Af_i} = f_i & i = j \end{cases}$$

Also ist $a := a_1 + \ldots + a_n$ invertierbar mit Inversem $a^{-1} = b = b_1 + \ldots + b_n$ und es gilt für $i = 1, \ldots, n$ stets $a^{-1}e_ia = b_ie_ia_i = b_ia_ib_ia_i = f_i^2 = f_i$. □

Beispiel Sei $A = \mathrm{M}_2(k)$ die k-Algebra der 2×2-Matrizen. Sei $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $Ae_1 \simeq Af_1 \simeq k^2$. Insbesondere ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{f_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{a_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_1}.$$

5.18 Definition Sei R ein Ring und sei $\mathrm{NU} := \mathrm{NU}(R) := \{x \in R : x \text{ ist nicht invertierbar}\}$. 16.01.2017

Wir nennen R einen *lokalen Ring*, falls NU ein zweiseitiges Ideal in R ist.

Bemerkung Sei R ein lokaler Ring. Wegen $1 \notin \mathrm{NU}$ ist NU ein echtes Ideal.

Außerdem ist für ein echtes Ideal $I \leq \mathrm{NU}$ jedes $x \in I$ nicht invertierbar, also ist $I \subseteq \mathrm{NU}$. Damit ist NU das eindeutig maximale zweiseitige Ideal in R.

Damit ist NU das *Brown-McCoy-Radikal* von R. Aus den Übungen ist bekannt: Ist R eine endlichdimensionale k-Algebra, so stimmt das Brown-McCoy-Radikal mit dem Jacobson-Radikal überein. Insbesondere gilt $\mathrm{rad}(R) = \mathrm{NU}$.

Beispiel Es ist $R = k[x]/(x^n)$ ein lokaler Ring mit $\mathrm{NU} = (x)/(x^n)$.

5.19 Lemma *Sei R ein lokaler Ring und $e = e^2 \in R$ ein Idempotent. Dann ist $e \in \{0, 1\}$.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein Idempotent $e = e^2 \in R$ mit $e \notin \{0, 1\}$. Dann ist auch $1 - e$ ein Idempotent mit $1 - e \notin \{0, 1\}$. Wegen $e(1 - e) = 0$ sind aber e und $1 - e$ nicht invertierbar.

Also ist $e, 1 - e \in \mathrm{NU}$. Da NU aber ein Ideal in R ist, ist somit auch $1 = e + (1 - e) \in \mathrm{NU}$, also $\mathrm{NU} = R$, im *Widerspruch* zu $1 \notin \mathrm{NU}$. □

Beispiel Sei $R = \mathbf{Z}$. Dann sind 0 und 1 die einzigen Idempotente. Allerdings ist $2, 3 \in \mathrm{NU}$, jedoch $1 = 3 - 2 \notin \mathrm{NU}$. Also ist NU kein Ideal und somit $\mathbf{Z}$ kein lokaler Ring.

5.20 Proposition *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und P projektiv. Dann sind äquivalent:*

(a) *P ist unzerlegbar.*

(b) *$\mathrm{rad}(P)$ ist ein maximaler Teilmodul von P.*

(c) *$\mathrm{End}_A(P)$ ist ein lokaler Ring.*

Beweis. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Da P unzerlegbar ist, ist $P/\mathrm{rad}(P)$ auch unzerlegbar und halbeinfach, also einfach. Daher ist $\mathrm{rad}(P)$ ein maximaler Teilmodul von P.

Zu (b) $\Rightarrow$ (c): Sei $\mathrm{rad}(P)$ ein maximaler Teilmodul von P. Sei $f\colon P \to P$ mit $f \in \mathrm{End}_A(P)$.

Ist nun f surjektiv, so ist f wegen $\dim_k P < \infty$ ein Isomorphismus, also invertierbar.

Ist f nicht surjektiv, so ist $\mathrm{Im}(f) \subseteq P$ ein echter Teilmodul, liegt also in $\mathrm{rad}(P)$. Daher ist

$$\mathrm{NU}(\mathrm{End}_A(P)) = \{f\colon P \to P : \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(P)\}.$$

Offensichtlich ist die Summe zweier Elemente aus NU wieder in NU. Sei nun auch $g \in \mathrm{End}_A(P)$. Dann ist $\mathrm{Im}(gf) \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(P)$, also $gf \in \mathrm{NU}$.

Wegen $g(\mathrm{rad}(P)) \subseteq \mathrm{rad}(P)$ ist aber auch $\mathrm{Im}(fg) \subseteq \mathrm{rad}(P)$, also auch $fg \in \mathrm{NU}$.

Daher ist NU ein zweiseitiges Ideal in $\mathrm{End}_A(P)$, also ist $\mathrm{End}_A(P)$ ein lokaler Ring.

Zu (c) $\Rightarrow$ (a): Ist $\mathrm{End}_A(P)$ lokal, so sind nach Lemma 5.19 alle Idempotente 0 oder 1, also ist P unzerlegbar. □

Proposition 5.20 liefert durch Projektivisierung (Theorem 5.11):

5.21 Korollar *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und $M \in A$-*`mod`*. Dann ist M unzerlegbar genau dann, wenn $\mathrm{End}_A(M)$ ein lokaler Ring ist.*

Frage: Wann ist A als Algebra zerlegbar oder unzerlegbar?

Seien A_1 und A_2 zwei k-Algebren. Definiere deren Summe $A = A_1 \oplus A_2$ durch komponentenweise Multiplikation und Addition. Für $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$ schreibe $a_1 + a_2 := (a_1, a_2)$. Beachte, dass $A_1, A_2 \subseteq A$ dann zweiseitige Ideale in A sind.

Die Eins ist durch $1_A = 1_{A_1} + 1_{A_2}$ gegeben und es gilt $1_{A_1}1_{A_2} = 1_{A_2}1_{A_1} = 0$ und $1_{A_1}^2 = 1_{A_1}$, sowie $1_{A_2}^2 = 1_{A_2}$. Somit sind 1_{A_1} und 1_{A_2} orthogonale Idempotente.

Beispiel Sei $A = \mathrm{M}_n(k)$ die k-Algebra der $n \times n$-Matrizen. Sei $e = e^2 \in A$ ein idempotent.

Dann ist jedoch $A \neq eAe \oplus (1-e)A(1-e)$, da A als einfache Algebra keine zweiseitigen Ideale außer 0 und A selbst besitzt.

Insbesondere liefert eine Zerlegung der 1 in paarweise orthogonale Idempotente im Allgemeinen keine Zerlegung von A als Algebra.

5.22 Proposition *Sei A ein Ring. Eine Zerlegung von A als Ring in $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ entspricht einer Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ in paarweise orthogonale zentrale Idempotente, d.h. $e_i \in \mathrm{Z}(A)$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Somit ist A unzerlegbar als Ring genau dann, wenn 1_A zentralprimitiv in A ist, also 1_A primitiv in $\mathrm{Z}(A)$ ist.

Insbesondere gilt für eine k-Algebra A mit $\dim_k A$: Es ist A unzerlegbar genau dann, wenn $\mathrm{Z}(A)$ ein lokaler Ring ist.

Beweis. Dank Induktion genügt es, den Fall $n = 2$ zu betrachten.

Sei $A = A_1 \oplus A_2$. Dann sind 1_{A_1} und 1_{A_2} orthogonale Idempotente und es gilt für $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$

$$(1_{A_1}, 0)(a_1, a_2) = (a_1, 0) = (a_1, a_2)(1_{A_1}, 0), \text{ sowie } (0, 1_{A_2})(a_1, a_2) = (0, a_2) = (a_1, a_2)(0, 1_{A_2}).$$

Also sind $1_{A_1} = (1_{A_1}, 0)$ und $1_{A_2} = (0, 1_{A_2})$ zentral in A.

Sei umgekehrt $e = e^2 \in \mathrm{Z}(A)$ ein zentrales Idempotent. Dann ist $1 = e + (1-e)$ eine Zerlegung der Eins. Zeige: $A = eAe \oplus (1-e)A(1-e)$ ist eine Zerlegung als k-Algebren.

Wegen $e \in \mathrm{Z}(A)$ ist $eAe = eA = eA$, also ist eAe ein zweiseitiges Ideal von A. Für alle $a \in A$ ist zudem $eeae = eae = eaee$, also ist e eine Eins in eAe. Somit ist eAe eine k-Algebra. Für $(1-e)A(1-e)$ gilt dies analog.

Ist nun $a \in eAe \cap (1-e)A(1-e)$, so ist $a = ae = a(1-e)$, so $a = ae(1-e) = 0$. Somit gilt $eAe \cap (1-e)A(1-e) = \{0\}$. Für $a \in A$ beliebig ist zudem $a = a1 = ae + a(1-e)$ mit $ae \in eAe$ und$a(1-e) \in (1-e)A(1-e)$. Insgesamt gilt also $A = eAe \oplus (1-e)A(1-e)$. $\square$

Beispiel Betrachte den Köcher $Q = \big(1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3\big)$ und die Wegealgebra kQ. Sei $V \in kQ\text{-}\mathtt{rep}$, d.h. $V = \big(V(1) \xrightarrow{f} V(2) \xrightarrow{g} V(3)\big)$ mit endlichdimensionalen k-Vektorräumen $V(i)$ und linearen Abbildungen f und g.

Sei $S_3 = \big(0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k\big)$ der einfache Modul an 3 und betrachte den injektiven Homomorphismus von kQ-Darstellungen

$$\begin{tikzcd} V \\ S_3^{\dim V(3)} \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "f"] & V(2) \arrow[r, "g"] & V(3) \\ 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & V(3). \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

Wir erhalten die kurze exakte Sequenz $S_3^{\dim V(3)} \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/S_3^{\dim V(3)} = \big(V(1) \xrightarrow{f} V(2) \longrightarrow 0\big)$.

Sei nun $S_2 = \big(0 \longrightarrow k \longrightarrow 0\big)$ der einfache Modul an 2 und betrachte den injektiven Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} V/S_3^{\dim V(3)} \\ S_2^{\dim V(2)} \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "f"] & V(2) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] \arrow[u] & V(2) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & 0. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dann ist $S_2^{\dim V(2)} \hookrightarrow V/S_3^{\dim V(3)} \twoheadrightarrow (V/S_3^{\dim V(3)})/S_2^{\dim V(2)} = \big(V(1) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\big) = S_1^{\dim V(1)}$ mit dem einfachen Modul S_1 an 1.

Insgesamt sehen wir, dass V in gewissem Sinne "zusammengesetzt" ist aus einfachen Moduln, d.h. es gibt eine Kette von kQ-Moduln $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_n$ mit einfachen Faktoren V_j/V_{j+1} für alle j. Dabei kommt zum Beispiel der einfache Faktor S_1 genau $\dim V(1)$-mal vor.

5.23 Definition Sei A eine k-Algebra und M ein A-Modul.

Eine endliche Kette von Teilmoduln $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$, wobei M_{j+1}/M_j einfach ist für $j = 0, \ldots, n-1$, heißt *Kompositionsreihe* oder *Jordan-Hölder-Reihe* von M. Die vorkommenden einfachen Moduln $S \simeq M_{j+1}/M_j$ heißen *Kompositionsfaktoren* von M. Die *Multiplizität* oder *Vielfachheit* von S ist die Anzahl der Indizes $j+1$ mit $S \simeq M_{j+1}/M_j$. Die Länge der Kette $\ell(M) ::= n$, also die Summe der Multiplizitäten heißt *(Kompositions-)Länge* von M.

Beispiel Betrachte die Kette von Teilmoduln

$$k[x] \supseteq xk[x] \supseteq x^2k[x] \supseteq \ldots .$$

Dann ist jeder Quotient aufeinanderfolgender Teilmoduln isomorph zu $k[x]/xk[x]$, also zum einfachen Modul gegeben durch die folgende Köcherdarstellung.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

Für ein beliebiges $\lambda \in k$ erhalten wir außerdem die Kette

$$k[x] \supseteq (x-\lambda)k[x] \supseteq (x-\lambda)^2k[x] \supseteq \ldots .$$

Hier ist jeder Quotient isomorph zum einfachen Modul, welcher durch die folgende Köcherdarstellung gegeben ist.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[loop right, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

Somit kann bei einer Verallgemeinerung auf unendlich lange Kompositionsreihen keine Eindeutigkeit der Faktoren und ihrer Vielfachheiten erwartet werden.

5.24 Theorem (Satz von Jordan-Hölder) *Seien* $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ *und* $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_\ell = M$ *zwei Kompositionsreihen von* M*.*

Dann gilt $n = \ell$ *und die Kompositionsfaktoren und ihre Vielfachheiten in den beiden Kompositionsreihen stimmen überein (bis auf Anordnung und Isomorphie).*

Beweis. Ohne Einschränkung ist $n \leq \ell$. Wir führen den Beweis per Induktion nach n, d.h. nach 18.01.2017
der Länge der kürzeren Kompositionsreihe.

Ist $n = 1$, so ist $M = M_1 = N_\ell$ einfach, also $\ell = 1$ und somit $N_1 = M_1 = M$.

Sei nun $n > 1$. *Falls* $M_{n-1} = N_{\ell-1}$, so wende Induktion auf M_{n-1} an. Es folgt $n - 1 = \ell - 1$, somit auch $n = \ell$ und die zu zeigende Aussage folgt.

Falls $M_{n-1} \neq N_{\ell-1}$, so ist $M_{n-1} \cap N_{\ell-1} \subsetneq M_{n-1}, N_{\ell-1}$. Sonst wäre nämlich $M_{n-1} \subsetneq N_{\ell-1}$ oder umgekehrt, im Widerspruch zu M_n/M_{n-1}, bzw. $N_\ell/N_{\ell-1}$ einfach. Es ist $M = M_{n-1} + N_{\ell-1}$, da M/M_{n-1} einfach ist, also M_{n-1} maximal mit $N_{\ell-1} \not\subseteq M_{n-1}$.

Es gilt der *Isomorphiesatz für Moduln*: Für Moduln X und Y ist $(X+Y)/X \simeq Y/(X \cap Y)$. Somit ist

$$\begin{aligned} S &:= M/M_{n-1} = (M_{n-1} + N_{\ell-1})/M_{n-1} \simeq N_{\ell-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}) \\ T &:= N/N_{n-1} = (M_{n-1} + N_{\ell-1})/N_{\ell-1} \simeq M_{n-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}). \end{aligned}$$

Insgesamt sind wir also in der folgenden Situation.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & M = M_{n-1} + N_{\ell-1} \arrow[dl, "S"'] \arrow[dr, "T"] & & \\
 & M_{n-1} \arrow[dl] \arrow[dr, "T"'] & & N_{\ell-1} \arrow[dl, "S"] \arrow[dr] & \\
M_{n-2} & & M_{n-1} \cap N_{\ell-1} & & N_{\ell-2}
\end{tikzcd}$$

Nun betrachte die folgende Kette von Teilmoduln

$$M_{n-1} \supseteq M_{n-1} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-2} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-3} \cap N_{\ell-1} \supseteq \ldots$$

Es ist $M_{n-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}) \simeq T$ einfach, und für $0 \leq j \leq n-2$ ist

$$\begin{aligned} (M_{j+1} \cap N_{\ell-1})/(M_j \cap N_{\ell-1}) &= (M_{j+1} \cap N_{\ell-1})/(M_j \cap (M_{j+1} \cap N_{\ell-1})) \\ &\simeq (M_{j+1} \cap N_{\ell-1} + M_j)/M_j \subseteq M_{j+1}/M_j, \end{aligned}$$

mit M_{j+1}/M_j einfach. Somit ist obige Kette eine Kompositionsreihe von M_{n-1} der Länge $\leq n-1$. Jedoch ist bereits $M_{n-1} \supsetneq M_{n-2} \supsetneq M_{n-3} \supsetneq \ldots$ eine Kompositionsreihe von M_{n-1} der Länge $n-1$, also ist nach Induktion auch obige Kette eine Kompositionsreihe der Länge $n-1$.

Dann ist auch $N_{\ell-1} \supseteq M_{n-1} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-2} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-3} \cap N_{\ell-1} \supseteq \ldots$ eine Kompositionsreihe von $N_{\ell-1}$ der Länge $n-1$, schließlich war auch $N_{\ell-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}) \simeq S$ einfach. Da allerdings $N_{\ell-1} \supseteq N_{\ell-2} \supseteq N_{\ell-3} \supseteq \ldots$ auch eine Kompositionsreihe von $N_{\ell-1}$ der Länge $\ell - 1$, folgt mit Induktion $n - 1 = \ell - 1$. Ebenso folgt, dass die beiden ursprünglichen Kompositionsreihen isomorphe Subfaktoren haben. $\square$

Wir bezeichnen mit $[M : S]$ die Vielfachheit des einfachen Moduls S in den Kompositionsreihen des Moduls M, falls dies wohldefiniert ist.

Bemerkung Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra, e ein primitives idempotent und Ae der zugehörige unzerlegbar projektive Modul. Sei S ein einfacher Modul.

Es ist $Ae/\operatorname{rad}(Ae) = T$ ein einfacher Modul. Falls nun $T \simeq S$ gilt, so existiert eine Surjektion $Ae \twoheadrightarrow Ae/\operatorname{rad}(Ae) = T \simeq S$, d.h. Ae bildet surjektiv auf S ab.

Angenommen, es wäre auch Af unzerlegbar projektiv mit einer Surjektion $Af \twoheadrightarrow S$.

$$\begin{tikzcd} & Af \arrow[dl, "\exists"'] \arrow[d, two heads] & \\ Ae \arrow[r, two heads] & S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine (surjektive) Hochhebung $Af \to Ae \to S$, d.h. $Af \twoheadrightarrow Ae$. Es folgt, dass $Ae \mid Af$. Da aber Af unzerlegbar ist, also $Ae \simeq Af$.

Also: Ein projektiv unzerlegbarer Modul Ae bildet nur auf einen einfachen Modul nichttrivial ab, nämlich auf $Ae/\operatorname{rad}(Ae)$.

Weiterhin existiert ein Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(Ae, S) &\longrightarrow eS \\ (f\colon Ae \to S) &\longmapsto f(e) = f(e^2) = ef(e). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Hom}_A(Ae, S) \neq 0 \Leftrightarrow eS \neq 0$. Somit ist S der einzige einfache Modul mit $eS \neq 0$ genau dann, wenn $S \simeq Ae/\operatorname{rad}(Ae)$.

Ist nun $1_A = e_1 + \ldots + e_\ell + e_{\ell+1} + \ldots + e_n$ eine orthogonale Zerlegung der 1 in primitive Idempotente, so heißen e_i und e_j äquivalent, falls $Ae_i \simeq Ae_j$. Seien nun $e_1, \ldots, e_\ell$ äquivalent zu e. Ist S nun der einfache Modul zu Ae, so gilt

$$S = 1_A \cdot S = (e_1 + \ldots + e_n) \cdot S = e_1 S \oplus \ldots \oplus e_\ell S \oplus e_{\ell+1} S \oplus \ldots \oplus e_n S = e_1 S \oplus \ldots \oplus e_\ell S.$$

Daher ist wegen ${}_A A = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_\ell \oplus Ae_{\ell+1} \oplus \ldots \oplus Ae_n$ nun

$$\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A) = \underbrace{S \oplus \ldots \oplus S}_{\ell\text{-mal}} \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_h,$$

mit $T_i \not\simeq S$.

Ist $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, so ist $0 \to eX \to eY \to eZ \to 0$ eine exakte Sequenz von k-Vektorräumen. Falls $eY \neq 0$, so kommt $S = Ae/\operatorname{rad}(Ae)$ als Kompositionsfaktor in Y vor. Insbesondere ist $eX \neq 0$ oder $eZ \neq 0$, was von beiden der Fall ist, ist jedoch unklar.

6 Morita-Äquivalenzen

Seien A und B Ringe oder Algebren. Wir untersuchen die Frage, wann die Modulkategorien A-`Mod` und B-`Mod` äquivalent sind.

Beispiel Sei $A = k$ ein Körper. Dann ist $A\text{-}\mathtt{Mod} = k\text{-}\mathtt{Vect}$ die Kategorie der k-Vektorräume. Die unzerlegbaren Objekte sind bis auf Isomorphie $A = k$, ebenso die einfachen Objekte $A = k$. Es gilt $\mathrm{End}_A(k) = k$.

Sei nun $B = \mathrm{M}_\ell(k)$ eine Matrixalgebra über k. Dann sind all einfachen Objekte bis auf Isomorphie durch k^ℓ gegeben, und es gilt wieder $\mathrm{End}_B(k^\ell) = k$.

In der Tat sind die (endlichdimensionalen) Modulkategorien äquivalent, es gilt $A\text{-}\mathtt{mod} \simeq B\text{-}\mathtt{mod}$. Es handelt sich um eine nichttriviale Äquivalenz, insbesondere wird die Dimension der einfachen Moduln nicht erhalten.

6.1 Definition Seien A und B Ringe (oder Algebren). Es heißen A und B *Morita-äquivalent* genau dann, wenn $A\text{-}\mathtt{Mod} \simeq B\text{-}\mathtt{Mod}$ als Kategorien gilt, d.h. wenn ihre Modulkategorien äquivalent sind.

6.2 Lemma *Eine Äquivalenz $F\colon A\text{-}\mathtt{Mod} \to B\text{-}\mathtt{Mod}$ erhält die Eigenschaften epi, mono, iso, also auch surjektiv, injektiv und bijektiv. F bildet Kerne auf Kerne, Cokerne auf Cokerne und Bilder auf Bilder ab, sowie initiale auf initiale, terminale auf terminale und Nullobjekte auf Nullobjekte ab.*

Beweis. Sei F eine Äquivalenz, $G\colon B\text{-}\mathtt{Mod} \to A\text{-}\mathtt{Mod}$ ein Quasiinverses zu F, sei $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ der zugehörige natürliche Isomorphismus.

Wir zeigen: Ist $f\colon X \to Y$ ein epi, so auch $F(f)$. Seien also $g\colon F(Y) \to Z$ und $h\colon F(Y) \to Z$ gegeben mit $F(f)g = F(f)h$. Zu zeigen ist, dass $g = h$ gilt.

Wir berechnen

$$
\begin{array}{lcl}
 & (G \circ F)(f)G(g) = (G \circ F)(f)G(h) & \text{Anwenden von } G \\
\Rightarrow & \eta_X(G \circ F)(f)G(g) = \eta_X(G \circ F)(f)G(h) & \text{Präkomposition mit } \eta_X \\
\Rightarrow & f\eta_Y G(g) = f\eta_Y G(h) & \eta_X \text{ ist natürlich} \\
\Rightarrow & \eta_Y G(g) = \eta_Y G(h) & f \text{ ist epi} \\
\Rightarrow & G(g) = G(h) & \eta_Y \text{ ist iso} \\
\Rightarrow & g = h & G \text{ ist treu.}
\end{array}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(G \circ F)(X) \arrow[r, "(G\circ F)(f)"] & (G \circ F)(Y) \arrow[r, shift left, "G(g)"] \arrow[r, shift right, "G(h)"'] & G(Z) \\
X \arrow[u, "\eta_X"', "\wr"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "\eta_Y"', "\wr"] &
\end{tikzcd}
$$

Die Beweise für den anderen Aussagen folgen auf analoge Weise. $\square$

6.3 Lemma *Eine Äquivalenz $F\colon A\text{-}\mathtt{Mod} \to B\text{-}\mathtt{Mod}$ ist exakt, d.h. F bildet exakte Sequenzen in A-`Mod` auf exakte Sequenzen in B-`Mod` ab, sowie Produkte auf Produkte und Coprodukte auf* 23.01.2017

Coprodukte, Teilmoduln (also Bilder von Monos) auf Teilmoduln, Quotienten (also Bilder von Epis) auf Quotienten und einfache Moduln auf einfache Moduln.

6.4 Lemma *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien erhalten die Addition von Morphismen, d.h. für alle Objekte X und Y ist*

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F(X),F(Y)),\ f \longmapsto F(f)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis. Wir zeigen, dass die Addition von Morphismen kategoriell definiert werden kann. Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$.

Erster Schritt: $X \oplus X$ ist ein Biprodukt (d.h. Produkt und Coprodukt).

$$\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X \arrow[ur, dotted, "\exists!\Delta"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & X & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[dl, dotted, "\exists!\nabla"'] & \\
X & X \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\iota_1"] & X \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Daher gibt es die Diagonalabbildung $\Delta\colon X \to X \oplus X$ mit $\Delta\pi_1 = \mathrm{id}_X$ und $\Delta\pi_2 = \mathrm{id}_X$ und die Codiagonalabbildung $\nabla\colon X \oplus X \to X$ mit $\iota_1\nabla = \mathrm{id}_X$ und $\iota_2\nabla = \mathrm{id}_X$.

Zweiter Schritt: Betrachte Morphismen $X \oplus X \to Y \oplus Y$. Betrachte dazu $X \oplus X$ zuerst als Coprodukt.

$$\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[dl, dotted, "\exists!h_1"'] & \\
Y & X \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[u, "\iota_1"] & X \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[ll, bend left, "0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[dl, dotted, "\exists!h_2"'] & \\
Y & X \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "\iota_1"] & X \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[ll, bend left, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

Somit existiert $h_1\colon X \oplus X \to Y$ mit $\iota_1 h_1 = \alpha$ und $\iota_2 h_1 = 0$ und $h_2\colon X \oplus X \to Y$ mit $\iota_1 h_2 = 0$ und $\iota_2 h_2 = \beta$.

Nun betrachte $Y \oplus Y$ als Produkt.

$$\begin{tikzcd}
& Y \oplus Y \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X \oplus X \arrow[ur, dotted, "\exists!h"] \arrow[r, "h_1"] \arrow[rr, bend right, "h_2"'] & Y & Y
\end{tikzcd}$$

Daher existiert $h\colon X \oplus X \to Y \oplus Y$ mit $\iota_1 h\pi_1 = \alpha$, $\iota_1 h\pi_2 = 0$, $\iota_2 h\pi_1 = 0$ und $\iota_2 h\pi_2 = \beta$. Wir bezeichnen h aus naheliegenden Gründen mit

$$h =\colon \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dritter Schritt: Wir fassen alles zusammen und betrachten

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\quad\Delta_X\quad} & X \oplus X & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)} & Y \oplus Y & \xrightarrow{\quad\nabla_Y\quad} & Y \\
x & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \alpha(x) + \beta(x)
\end{array}$$

D.h. durch $\alpha + \beta := \Delta_X \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \nabla_Y$ haben wir die Addition kategoriell definiert. $\square$

6.5 Definition Ein Modul G heißt *Generator* von A-$\texttt{Mod}$ genau dann, wenn für alle $M \in A$-$\texttt{Mod}$ es eine Menge I und einen Epi $\bigoplus_{i\in I} G \twoheadrightarrow M$ gibt.

6.6 Lemma *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien bilden Generatoren auf Generatoren ab.*

6.7 Definition Ein A-Modul P heißt *Progenerator*, falls P endlich erzeugt projektiv und ein Generator ist.

6.8 Lemma *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien bilden endlich erzeugte Moduln auf endlich erzeugte Moduln ab.*

Beweis. Zeige: M ist endlich erzeugt genau dann, wenn jede aufsteigende Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$ von Teilmoduln mit $\bigcup_n M_n = M$ abbricht, d.h. es gibt ein m mit $M = M_m = M_{m+1} = \dots$.

Da Äquivalenzen Teilmoduln erhalten, zeigt dies das Lemma.

Sei einerseits M endlich erzeugt durch $m_1, \dots, m_\ell \in M$ und sei $M = \bigcup_n M_n$ mit $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$. Dann ist $m_1 \in M_{n_1} \dots m_\ell \in M_{n_\ell}$ mit $n_i \in \mathbf{N}$. Sei nun $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_\ell\}$. Dann gilt $m_1, \dots, m_\ell \in M_{n_0}$, also $M_n = M$ für $n \geq n_0$.

Wird andererseits jede Kette stationär, so wähle $m_1 \in M$. Dann ist $M_1 := Am_1 \subseteq M$. Wähle $m_2 \in M \setminus M_1$. Dann ist $M_1 \subseteq M_2 := \langle m_1, m_2 \rangle M$. Fahre so weiter fort. Da die Kette abbrechen muss, gilt $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$, d.h. M ist endlich erzeugt. $\square$

6.9 Korollar *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien bilden Progeneratoren auf Progeneratoren ab.*

Beachte, dass $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ im Allgemeinen nur linksexakt ist, d.h. für eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

ist im Allgemeinen nur

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, Z)$$

exakt. Da wir einen Hom-Funktor als Kandidaten für unsere Morita-Äquivalenzen in Betracht ziehen, muss nach folgendem Lemma das M in diesem Fall projektiv sein, um Exaktheit zu gewährleisten.

6.10 Proposition *Es ist* $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ *ein exakter Funktor genau dann, wenn* M *projektiv ist.*

Beweis. Vergleiche Übungsblatt 9, wichtig ist die Surjektivität von $\mathrm{Hom}_A(M, g)$, welche mit der Surjektivität von g durch die Hochhebungseigeschaft über das projektive M folgt. $\square$

Nun suchen wir Kandidaten für Quasiinverse zu Hom-Funktoren. Dabei definieren wir den Begriff der adjungierten Funktoren und definieren das Tensorprodukt von Moduln, welches den gesuchten Kandidaten liefert.

6.11 Definition Seien $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Dann heißt F *linksadjungiert* zu G, bzw. G heißt *rechtsadjungiert* zu F, falls für alle $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$ es einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)$ gibt.

6.12 Definition Sei A ein Ring. Sei $X_A \in \texttt{Mod-}A$, ${}_AY \in A\texttt{-Mod}$. Sei $X \times Y$ das kartesische Produkt (als Mengen). Sei Z eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $\varphi\colon X \times Y \to Z$ heißt *A-balanciert*, falls für $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ und $a \in A$ gilt 25.01.2017

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) \qquad \varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$
$$\varphi(xa, y) = \varphi(x, ay).$$

Ein Paar (T,τ) bestehend aus einer abelschen Gruppe $T = X \oplus_A Y$, sodass $\tau\colon X \times Y \to X \oplus Y$ eine A-balancierte Abbildung ist, heißt *Tensorprodukt* von X und Y über A, falls folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jede A-balancierte Abbildung $\varphi\colon X \times Y \to Z$ gibt es einen eindeutigen Homomorphismus abelscher Gruppen $f\colon X \otimes_A Y \to Z$ mit $\varphi = \tau f$.

$$\begin{tikzcd}
X_A \times {}_AY \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
& Z \\
T = X \otimes_A Y \arrow[ur, dotted, "\exists! f"'] &
\end{tikzcd}$$

6.13 Proposition *Das Tensorprodukt $X \otimes_A Y$ existiert und ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

Beweis. Sei $F := \bigoplus_{X\times Y} \mathbf{Z}$ die freie abelsche Gruppe auf der Menge $X \times Y$. Diese kommt mit der Injektion $i\colon X \times Y \hookrightarrow F, (x,y) \mapsto (x,y)$.

Sei H die Untergruppe von F erzeugt von Elementen der Form

$$(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y),\ (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2),\ (xa, y) - (x, ay)$$

für $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ und $a \in A$. Sei $T := F/H$ als abelsche Gruppe. Sei $\tau := i\pi$. Dann ist τ eine A-balancierte Abbildung.

Zudem erfüllt (T,τ) die universelle Eigenschaft: Ist $\varphi\colon X \times Y \to Z$ eine A-balancierte Abbildung, so definiere $g\colon F \to Z$ durch $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$. Dann liegt H im Kern von g, also existiert $f\colon T \to Z$ mit $\varphi = \tau f$ und f ist eindeutig mit dieser Eigenschaft. $\square$

Bemerkung Ist (T,τ) ein Tensorprodukt von X und Y, so schreiben wir $x \otimes y := \tau(x,y)$ für $x \in X$ und $y \in Y$. Solche Elemente erzeugen $X \otimes_A Y$, aber nicht jedes Element sieht so aus.

6.14 Lemma *Sei X erzeugt von $x_1, \ldots, x_n$ und Y erzeugt von $y_1, \ldots, y_\ell$. Dann ist jedes Element von $X \otimes_A Y$ eine Summe von Elementen der Form $x_j a \otimes y_k$. Im Fall $A = \mathbf{Z}$, ist jedes Element eine Summe von Elementen der Form $x_j \otimes y_k$.*

Beweis. Für $x \in X$ und $y \in Y$ gibt es $a_j, b_k \in A$ mit $x = \sum_j x_j a_j$ und $y = \sum_k b_k y_k$. Dann ist

$$x \otimes y = \left(\sum_j x_j a_j\right) \otimes \left(\sum_k b_k y_k\right) = \sum_{j,k} x_j (a_j b_k) \otimes y_k. \qquad \square$$

Beispiel Seien $a, b \in \mathbf{N}$. Wir untersuchen $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$. Nach Lemma 6.14 ist $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ erzeugt von $\bar{1} \otimes \bar{1}$, also wieder zyklisch.

Nach dem Euklidischen Algorithmus gibt es $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ mit $d := \mathrm{ggT}(a,b) = \lambda a + \mu b$. Für $m \in \mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ und $n \in \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ gilt dann

$$md \otimes n = m(\lambda a + \mu b) \otimes n = (\lambda ma \otimes n) + (m\mu b \otimes n) = (\lambda \underbrace{ma}_{=0} \otimes n) + (m\mu \otimes \underbrace{bn}_{=0}) = 0$$

Somit ist die Ordnung von $m \otimes n$ ein Teiler von d. Andererseits betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \\ (x,y) & \longmapsto & xy + d\mathbf{Z}. \end{array}$$

Diese Abbildung ist $\mathbf{Z}$-balanciert, surjektiv und faktorisiert über $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$, denn für $n, m \in \mathbf{Z}$ gilt

$$(x + na, y + mb) \mapsto xy + xmb + yna + nmab + d\mathbf{Z} = xy + d\mathbf{Z}.$$

Somit gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$. Insgesamt folgt der Isomorphismus

$$\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/\operatorname{ggT}(a,b)\mathbf{Z}.$$

6.15 Proposition *Seien A, B, C Ringe und ${}_BX_A$ und ${}_AY_C$ Bimoduln. Dann ist ${}_BX_A \otimes_A {}_AY_C$ ein B-C-Bimodul. Weiterhin gilt ${}_BX_A \otimes_A {}_AA_A \simeq {}_BX_A$ und ${}_AA_A \otimes_A {}_AY_C \simeq {}_AY_C$, sowie für entsprechende Bimoduln $(X_1 \oplus X_2) \otimes Y \simeq X_1 \otimes Y \oplus X_2 \otimes Y$ und $(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z)$.*

Bemerkung Um aus dem Tensorprodukt einen Tensorproduktfunktor zu erhalten, müssen wir auch das Tensorprodukt von Morphismen definieren. Seien also $f\colon X_A \to X'_A$ und $g\colon {}_AY \to {}_AY'$ Homomorphismen.

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\tau"] & X' \times Y' \arrow[d, "\tau'"] \\
X \otimes Y \arrow[r, dotted, "\exists! f\otimes g"] & X' \otimes Y'
\end{tikzcd}$$

Für die Existenz von $f \otimes g$ ist also zu zeigen, dass $(f,g)\tau'$ eine A-balancierte Abbildung ist. Allerdings ist zum Beispiel für $x \in X$, $y \in Y$ und $a \in A$

$$\begin{aligned}
(xa, y)(f,g)\tau' = (xaf, yg)\tau' = xaf \otimes yg = (xf)a \otimes yg = xf \otimes a(yg) \\
= xf \otimes (ay)g = (xf, (ay)g)\tau' = (x, ay)(f,g)\tau'.
\end{aligned}$$

Für die Additivitäten ist die Rechnung analog.

6.16 Theorem (Adjunktionsformel) *Seien A und B Algebren (oder Ringe) und M_A, ${}_AN_B$, L_B Moduln. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus* 30.01.2017

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}_B(M_A \otimes_A N_B, L_B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M_A, \operatorname{Hom}_B({}_AN_B, L_B)).$$

D.h. der Tensorproduktfunktor $- \otimes_A {}_AN_B\colon \texttt{Mod-}A \to \texttt{Mod-}B$ ist linksadjungiert zum Hom-Funktor $\operatorname{Hom}_B({}_AN_B, -)\colon \texttt{Mod-}B \to \texttt{Mod-}A$.

Bemerkung Anderere Adjungierte zu $\otimes$ und Hom existieren im Allgemeinen nicht.

Beweis zu Theorem 6.16. Definiere

$$\begin{aligned}
\varphi\colon \quad \operatorname{Hom}(M \otimes N, L) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, L)) \\
(f\colon M \otimes N \to L) &\longmapsto (\varphi(f)\colon m \mapsto (n \mapsto f(m \otimes n)))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi\colon \quad \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, L)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(M \otimes N, L) \\
(g\colon M \to \operatorname{Hom}(N, L)) &\longmapsto (\psi(g)\colon m \otimes n \mapsto g(m)(n)).
\end{aligned}$$

Wir berechnen die Kompositionen von φ mit ψ und umgekehrt.

$$\begin{aligned}
(f\colon M \otimes N \to L) &\longmapsto (\varphi(f)\colon m \mapsto (\varphi(f)(m)\colon n \mapsto f(m \otimes n))) \\
&\longmapsto ((\varphi\psi)(f)\colon m \otimes n \mapsto \varphi(f)(m)(n) = f(m \otimes n))
\end{aligned}$$

Somit gilt $\varphi\psi = 1$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(g\colon M \to \operatorname{Hom}(N, L)) &\longmapsto (\psi(g)\colon m \otimes n \mapsto g(m)(n)) \\
&\longmapsto ((\psi\varphi)(g)\colon m \mapsto ((\psi\varphi)(g)(m)\colon n \mapsto \psi(g)(m \otimes n)) = g(m)(n)).
\end{aligned}$$

Somit gilt auch $\psi\varphi = 1$.

Alles Weitere (φ und ψ sind Homomorphismen, Natürlichkeit, etc.) folgt durch analoge Rechnungen. $\square$

6.17 Lemma *Sei $N \in A$-$\mathtt{Mod}$ und seien $M_1, M_2, M_3 \in \mathtt{Mod}$-$A$. Sei*

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Dann ist auch

$$M_1 \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, d.h. der Tensorproduktfunktor ist rechtsexakt.

Beweis. Wir erinnern daran, dass der Hom-Funktor linksexakt ist, d.h.

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

ist exakt genau dann, wenn

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M_3)$$

exakt ist. Analog gilt, dass eine Sequenz

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

exakt ist genau dann, wenn

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1, Y)$$

exakt ist. Wähle nun $Y = \mathrm{Hom}_B(N, X)$ mit $B = \mathrm{End}_A(_AN)$, also N als Bimodul $_AN_B$. Dann folgt aus der Exaktheit von

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, \mathrm{Hom}(N, X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, \mathrm{Hom}(N, X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1, \mathrm{Hom}(N, X)).$$

Mit Hilfe der Adjunktionsformel (Theorem 6.16) erhalten wir durch eine Diagrammjagd daraus die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3 \otimes N, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2 \otimes N, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1 \otimes N, X).$$

Doch daraus folgt mit der Linksexaktheit von Hom die Exaktheit von

$$M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0.$$

□

Beispiel Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen. Sei $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow e_2A \simeq \begin{pmatrix} 0 & k \end{pmatrix} \longrightarrow e_1A \simeq \begin{pmatrix} k & k \end{pmatrix} \longrightarrow e_1A/e_2A \longrightarrow 0.$$

Sei $N = Ae_2/Ae_1 \simeq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $e_2A \otimes_A N \simeq e_2N \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae_2, N) \simeq k$ und $e_1A \otimes_A N \simeq e_1A \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae_1, N) \simeq 0$. Folglich ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow e_2A \otimes N \simeq k \longrightarrow e_1A \otimes N \simeq 0 \longrightarrow e_1A/r_2A \otimes N = 0 \longrightarrow 0$$

nicht exakt, d.h. der Tensorproduktfuntktor ist im Allgemeinen nicht exakt.

6.18 Definition Ein Modul ${}_AN \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ heißt *flach* genau dann, wenn der Funktor $- \otimes_A N$ exakt ist.

6.19 Proposition *Projektive Moduln sind flach.*

Beweis. Es ist $- \otimes_A A \simeq \mathrm{id}$, also ist A flach. Weiterhin ist "flach sein" erhalten unter Summen und Summanden, daher sind alle projektiven Moduln flach. □

Bemerkung Die Umkehrung zu Proposition 6.19 gilt im Allgemeinen nicht, zum Beispiel ist $\mathbf{Q}$ als $\mathbf{Z}$-Modul flach, aber nicht projektiv.

Ist hingegen A eine endlichdimensionale k-Algebra, so sind die endlich erzeugten flachen Moduln gerade die endlich erzeugten projektiven Moduln.

6.20 Theorem (Morita, 1958) *Seien R und S Ringe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) *R und S sind Morita-äquivalent, d.h. es gilt $R\text{-}\mathtt{Mod} \simeq S\text{-}\mathtt{Mod}$ als Kategorien.*

(b) *Es gibt einen Progenerator $P \in R\text{-}\mathtt{Mod}$ mit $S = \mathrm{End}_R(P)$.*

(c) *Es gibt einen Progenerator $Q \in \mathtt{Mod}\text{-}R$ mit $S = \mathrm{End}_R(Q)^{\mathrm{op}}$.*

6.21 Korollar *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Seien $P_1, \dots, P_n$ Repräsentanten der Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver A-Moduln, d.h. es gilt $A \simeq P_1^{j_1} \oplus \dots \oplus P_n^{j_n}$ für gewisse $j_k \in \mathbf{N}$. Dann ist A Morita-äquivalent genau zu allen Ringen der Form $B \simeq \mathrm{End}_A(P_1^{h_1} \oplus \dots \oplus P_n^{h_n})$ mit $h_k \geq 1$.*

Bemerkung Von A kommen wir zu allen zu A Morita-äquivalenten Ringen durch endlich viele Anwendungen von

- Isomorphe Ersetzung $B \rightsquigarrow B'$ mit $B \simeq B'$.
- Vergrößerung der Form $B \rightsquigarrow \mathrm{M}_n(B)$ für $n \geq 1$.
- Verkleinerung der Form $B \rightsquigarrow eBe$ mit einem Idempotent $e^2 = e$, sodass Be ein Generator von $B\text{-}\mathtt{Mod}$ ist.

Beweis von Theorem 6.20. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Eine Äquivalenz $S\text{-}\mathtt{Mod} \to R\text{-}\mathtt{Mod}$ bildet S auf einen Progenerator P in $R\text{-}\mathtt{Mod}$ ab und es gilt $S \simeq \mathrm{End}_S(S) = \mathrm{Hom}_S(S, S) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, P) = \mathrm{End}_R(P)$. 01.02.2017

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): Sei ${}_RP \in R\text{-}\mathtt{Mod}$ ein Progenerator mit $\mathrm{End}_R(P) = S$. Dann ist ${}_RP_S$ ein R-S-Bimodul. Damit definieren wir Funktoren $F\colon R\text{-}\mathtt{Mod} \to S\text{-}\mathtt{Mod}$, $F = \mathrm{Hom}_R({}_RP_S, -)$ und $G\colon S\text{-}\mathtt{Mod} \to R\text{-}\mathtt{Mod}$, $G = {}_RP_S \otimes_S -$.

Zu zeigen sind die natürlichen Isomorphismen $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{S\text{-}\mathtt{Mod}}$ und $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{R\text{-}\mathtt{Mod}}$.

Dazu definiere einerseits $\varphi\colon \mathrm{id}_{S\text{-}\mathtt{Mod}} \to F \circ G$ für $M \in S\text{-}\mathtt{Mod}$ durch

$$\varphi_M\colon M \longrightarrow (F \circ G)(M) = \mathrm{Hom}_R({}_RP_S, {}_RP_S \otimes M), \; m \longmapsto (p \mapsto p \otimes m).$$

Wir müssen zeigen, dass φ natürlich in M ist und alle φ_M Isomorphismen sind. Zur Natürlichkeit sei $f\colon M_1 \to M_2$ und betrachte

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi_{M_1}} & \mathrm{Hom}(P, P \otimes M_1) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathrm{Hom}(1, 1\otimes f) \\ M_2 & \xrightarrow{\varphi_{M_2}} & \mathrm{Hom}(P, P \otimes M_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} m_1 & \longmapsto & (p \mapsto p \otimes m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(m_1) & \longmapsto & (p \mapsto p \otimes f(m)). \end{array}$$

Damit ist φ eine natürliche Transformation.

Um zu zeigen, dass alle φ_M Isomorphismen sind, betrachte zunächst den Fall $M = S$. In diesem Fall ist $\varphi_S(s) = (p \mapsto p \otimes s)$ für $s \in S$. Doch dies ist gerade der kanonische Isomorphismus $S \simeq \mathrm{Hom}_R(P, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, P \otimes_S S)$. Ebenso ist φ_M ein Isomorphismus für $M = S^\ell$, $\ell \geq 1$.

Für $M = \bigoplus_{i \in I} S$ beachte, dass P endlich erzeugt, d.h. das Bild eines jeden Homomorphismus $P \to \bigoplus_{i \in I} S$ nur endlich viele Summanden trifft. Damit ist auch dieser Fall durch S^ℓ bereits abgedeckt.

Nun sei M ein beliebiger Modul. Wähle eine projektive Präsentation von M der Form

$$S_2 := \bigoplus_{j \in J} S \xrightarrow{\ f\ } S_1 := \bigoplus_{i \in I} S \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow 0,$$

d.h. die obige Sequenz ist exakt. Dann sind φ_{S_1} und φ_{S_2} Isomorphismen. Betrachte dann das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{S_2}", "\wr"'] & S_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_{S_1}", "\wr"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_M"] & 0 \\
\mathrm{Hom}(P, P \otimes S_2) \arrow[r, "(1, 1 \otimes f)"] & \mathrm{Hom}(P, P \otimes S_1) \arrow[r, "(1, 1 \otimes f)"] & \mathrm{Hom}(P, P \otimes M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Durch eine Diagrammjagd folgt nun, dass auch φ_M ein Isomorphismus ist.

Andererseits definiere $\psi \colon G \circ F \to \mathrm{id}_{R\text{-}\mathtt{Mod}}$ für $N \in R$-`Mod` durch

$$\psi_N \colon {}_R P_S \otimes_S \mathrm{Hom}_R({}_R P_S, {}_R N) \longrightarrow N,\ p \otimes f \longmapsto f(p).$$

Nun gehe vor wie bei φ, d.h. zeige, dass ψ natürlich ist, danach die Spezialfälle $N = P$, sowie $N = \bigoplus_{i \in I} P$. Dann wähle wieder eine projektive Präsentation, möglich, da P projektiv ist und erhalte die Aussage erneut durch eine Diagrammjagd.

Zu (a) ⇔ (c): Benutze `Mod`-$R = R^{\mathrm{op}}$-`Mod`.

Alternativ: ${}_R P_S$ ist ein R-Progenerator für R-`Mod` genau dann, wenn ${}_R P_S$ ein S-Progenerator für `Mod`-S ist (vgl. Übungsblatt 11). □

6.22 Theorem (Satz von Eilenberg und Watts) *Sei R ein Ring und $F \colon R$-`Mod` $\to$ `Ab` ein rechtsexakter, additiver Funktor, der direkte Summen erhält, d.h. $F(\bigoplus_i M_i) \simeq \bigoplus_i F(M_i)$.*

Dann ist F natürlich isomorph zum Tensorfunktor $F(R) \otimes_R -$.

Beispiel Sei $P = Ae$ ein Progenerator mit einem Idempotent $e^2 = e$.

Für einen A-Modul M gilt dann sowohl $\mathrm{Hom}(Ae, M) = eM$, als auch $eA \otimes_A M = eM$.

Exakte Funktoren könne sich (manchmal) sowohl als Hom-Funktor als auch als Tensorfunktor schreiben lassen.

Beweis von Theorem 6.22. Sei $T := F(R)$. Zu zeigen ist, dass T ein R-Rechtsmodul ist und die Existenz eines natürlichen Isomorphismus $T \otimes_R M \to F(M)$. 06.02.2017

Sei $X \in R$-`Mod` und $x \in X$. Definiere die "Rechtsmultiplikation mit x" durch $\alpha_x \colon R \to X$, $r \mapsto rx$. Dies ist additiv und erfüllt für $r, s \in R$ stets $\alpha_x(rs) = rsx = r(sx) = r\alpha_x(s)$, d.h. α_x ist ein R-Linksmodulhomomorphismus. Speziell für $X = R$ bilden für $r \in R$ die Abbildungen α_r gerade die Elemente von $\mathrm{Hom}_R(R, R) = R$. Damit wird R ein R-Rechtsmodul.

Da F ein additiver Funktor ist, ist die Abbildung $R = \mathrm{Hom}_R(R, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ab}}(F(R), F(R))$ additiv. Insbesondere wird $T = F(R)$ ein R-Rechtsmodul durch $xr := F(\alpha_r)(x)$ für $x \in T$ und $r \in R$.

Nun definiere $\mu_M\colon F(R)\otimes_R M \to F(M)$ durch

$$\begin{array}{rcl} F(R)\times M & \longrightarrow & F(M) \\ (x,m) & \longmapsto & F(\alpha_m)(x). \end{array}$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung R-balanciert ist. Additivität ergibt sich aus der Additivität des Funktors F. Weiterhin ist für $x \in F(R)$, $m \in M$ und $r \in R$

$$\begin{aligned} (xr,m) &\mapsto F(\alpha_m)(xr) = F(\alpha_m)(F(\alpha_r)(x)) \\ (x,rm) &\mapsto F(\alpha_{rm})(x) = F(\alpha_r\alpha_m)(x) = F(\alpha_m)(F(\alpha_r)(x)). \end{aligned}$$

Damit ist obige Abbildung R-balanciert und die Existenz von $\mu_M\colon F(R)\otimes_R M \to F(M)$ als R-Modulhomomorphismus ist gezeigt.

Zur Natürlichkeit von μ_M, sei $f\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Wir müssen die Kommutativität des folgenden Diagramms nachweisen.

$$\begin{tikzcd} F(R)\otimes_R M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(R)\otimes_R N \arrow[r, "\mu_N"] & F(N) \end{tikzcd}$$

Einerseits ist für $x \in F(R)$ und $m \in M$

$$(\mu_M F(f))(x\otimes m) = F(f)(F(\alpha_m)(x)) = (F(\alpha_m)F(f))(x) = F(\alpha_m f)(x),$$

andererseits ergibt sich

$$((\mathrm{id}\otimes f)\mu_N)(x\otimes m) = \mu_N(x\otimes f(m)) = F(\alpha_{f(m)})(x).$$

Doch nun ist für $r \in R$ stets $(\alpha_m f)(r) = f(rm) = rf(m) = \alpha_{f(m)}(r)$, somit kommutiert obiges Diagramm.

Es bleibt zu zeigen, dass alle μ_M Isomorphismen sind. Dies folgt jedoch wie im Beweis zum Satz von Morita (Theorem 6.20), da F rechtsexakt ist und mit direkten Summen vertauscht. $\square$

7 Ext^1

Wir betrachten kurze exakte Sequenzen von R-Moduln

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0.$$

Wir bezeichnen dies als *Erweiterung von Z durch X*. Dabei sind X und Z fest, das Y darf variieren.

7.1 Definition Zwei Erweiterungen

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{g_2} Z \longrightarrow 0$$

von Z durch X heißen *äquivalent*, falls es einen Modulhomomorphismus $\xi\colon Y_1 \to Y_2$ gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\xi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_2"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bemerkung So ein ξ wie in Definition 7.1 muss ein Isomorphismus sein. Dies folgt durch eine Diagrammjagd.

ξ ist injektiv. Sei $y_1 \in Y_1$ mit $\xi(y_1) = 0$. Dann ist $0 = (\xi g_2)(y_1) = (g_1 \operatorname{id}_Z)(y_1)$, also $g_1(y_1) = 0$. Daher ist $y_1 \in \operatorname{Im}(f_1)$, also gibt es $x_1 \in X$ mit $f_1(x_1) = y_1$. Somit ist

$$0 = \xi(y_1) = (f_1\xi)(x_1) = (\operatorname{id}_X f_2)(x_1) = f_2(x_1).$$

Da f_2 injektiv ist, ist $x_1 = 0$ und daher $y_1 = f_1(x_1) = 0$, also ist ξ injektiv.

ξ ist surjektiv. Sei $y_2 \in Y_2$. Da g_1 surjektiv ist, gibt es $y_1 \in Y_1$ mit $g_1(y_1) = g_2(y_2)$. Dann ist aber

$$g_2(y_2 - \xi(y_1)) = g_2(y_1) - (\xi g_2)(y_1) = g_2(y_2) - g_1(y_1) = 0,$$

also $y_2 - \xi(y_1) \in \operatorname{Kern}(g_2) = \operatorname{Im}(f_2)$. Somit gibt es $x \in X$ mit $f_2(x) = y_2 - \xi(y_1)$. Doch dann ist

$$\xi(f_1(x) + y_1) = f_2(x) + \xi(y_1) = y_2 - \xi(y_1) + \xi(y_1) = y_2,$$

also ist ξ surjektiv.

7.2 Lemma *Äquivalenz von Erweiterungen ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität folgt mit $\xi = \operatorname{id}$, Symmetrie mit ξ^{-1} (vgl. vorherige Bemerkung) und Transitivität durch Komposition der ξ. $\square$

Beispiel Sei $Q = (1 \longrightarrow 2)$ der Köcher mit zwei Punkten und einem Pfeil. Wir betrachten gewisse Erweiterungen von kQ-Moduln.

Wir betrachten Erweiterungen von $Z = (k \longrightarrow 0)$ durch $X = (0 \longrightarrow k)$.

Wir betrachten Äquivalenzen zwischen einer Erweiterungen in einer Familie, die für $\lambda, \mu \neq 0$ gegeben ist durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dazu betrachte folgendes Diagramm mit $\nu, \rho \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1"] \arrow[dd, bend left, "\rho"] & k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "1"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dd, bend left, "1"] & k \arrow[r] \arrow[dd, bend left, "\rho"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\nu"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es ergeben sich die Bedingungen $\rho = \mu$ und $\nu = \rho\lambda$, also $\nu = \mu\lambda$. Somit sind die Äquivalenzklassen parametrisiert durch $\nu \in k \setminus \{0\}$.

Eine andere Familie von Erweiterungen von Z durch X ist für $\lambda, \mu \neq 0$ gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "0"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Hier betrachte das folgende Diagramm mit $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "0"] \arrow[dd, bend left, "\alpha"] & k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "1"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dd, bend left, "1"] & k \arrow[r] \arrow[dd, bend left, "\beta"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "0"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "1"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es ergeben sich die Bedingungen $\lambda\beta = 1$ und $\mu = \alpha$. Da α und β frei wählbar sind, sind alle Erweiterungen dieser Form äquivalent.

Insgesamt gibt es also $k \setminus \{0\}$ viele Erweiterungen der ersten Art und genau eine Erweiterung der zweiten Art. Fassen wir Erweiterungen der zweiten Art als 0 auf, so sind alle Erweiterungen von Z durch X durch den k-Vektorraum k parametrisiert.

Beispiel Wir suchen eine Äquivalenz ξ zwischen den folgenden beiden Erweiterungen von $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ durch $\mathbf{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, equal] & \mathbf{Z} \arrow[r, "1 \mapsto \bar{1}"] \arrow[d, "\xi"] & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z} \arrow[r, "1 \mapsto \bar{2}"] & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Zur Kommutativität des rechten Quadrats muss $\xi = 1$ gelten, doch dann kann das rechte Quadrat nicht kommutieren. Also sind die beiden Erweiterungen nicht äquivalent.

Dies zeigt, dass die Gleichheit bei X und bei Z in Definition 7.1 eine starke Bedingung ist.

7.3 Definition Die Menge aller Äquivalenzklassen von Erweiterungen von Z durch X wird mit $\operatorname{Ext}^1(Z, X)$ bezeichnet.

Aufgaben: $\operatorname{Ext}^1(Z,X)$ soll eine abelsche Gruppe und $\operatorname{Ext}^1(Z,X)$ funktoriell werden.

7.4 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(a) Gegeben sei ein Diagramm in $\mathcal{C}$ der Form

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z. \end{tikzcd}$$

Ein *Pullback* oder *Faserprodukt* ist ein Tripel (P, p_1, p_2) bestehend aus einem Objekt P und Morphismen $p_1\colon P \to X$ und $p_2\colon P \to Y$ mit $p_1 s = p_2 t$, sodass für alle Objekte A und Morphismen $f_1\colon A \to X$ und $f_2\colon A \to Y$ mit $f_1 s = f_2 t$ es genau einen Morphismus $g\colon A \to P$ gibt mit $f_1 = g p_1$ und $f_2 = g p_2$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

Das Quadrat aus P, Y, X und Z heißt *Pullback-Quadrat* und wird häufig gekennzeichnet durch

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z. \end{tikzcd}$$

(b) Gegeben sei ein Diagramm in $\mathcal{C}$ der Form 08.02.2017

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \\ Z. & \end{tikzcd}$$

Ein *Pushout* oder *Cofaserprodukt* ist ein Tripel (Q, q_1, q_2) bestehend aus einem Objekt Q und Morphismen $q_1\colon Y \to Q$ und $p_2\colon Z \to Q$ mit $sq_1 = tq_2$, sodass für alle Objekte B und Morphismen $f_1\colon Y \to B$ und $f_2\colon Z \to B$ mit $sf_1 = tf_2$ es genau einen Morphismus $g\colon Q \to B$ gibt mit $f_1 = q_1 g$ und $f_2 = q_2 g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ Z \arrow[r, "q_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & Q \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

Das Quadrat aus X, Y, Z und Q heißt *Pushout-Quadrat* und wird häufig gekennzeichnet durch

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near end] & Y \arrow[d, "q_1"] \\ Z \arrow[r, "q_2"] & Q \end{tikzcd}$$

Beispiele

- Sei Z ein terminales Objekt. Dann ist ein Pullback zum Diagramm

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z. \end{tikzcd}$$

gegeben durch das Produkt $P := X \times Y$ mit den Projektionen $p_1 \colon X \times Y \to X$ und $p_2 \colon X \times Y \to Y$. Das Pullback-Quadrat kommutiert dann, da Z terminal ist, d.h. da es nur einen Morphismus $X \times Y \to Z$ gibt.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "(f_1,f_2)"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & X \times Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

- Betrachte die Kategorie $\mathcal{C} = \texttt{Set}$, darin Teilmengen $X, Y \subseteq Z$ mit den Inklusionen $X \hookrightarrow Z$ und $Y \hookrightarrow Z$. Dann ist ein Pullback gegeben durch den Schnitt $P := X \cap Y$. Für eine weitere Menge A mit Abbildungen $f_1 \colon A \to X$ und $f_2 \colon A \to Y$ ist wegen $f_1(a) = f_2(a) \in Z$ für $a \in A$ stets $f_1(a), f_2(a) \in X \cap Y$, daher existiert $g \colon A \to X \cap Y$ mit $g(a) = f_1(a) = f_2(a)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d, hook] \\ & X \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

- In der algebraischen Topologie besagt der *Satz von Seifert-van Kampen*, dass die Fundamentalgruppe π_1 gewisse Pushouts in $\texttt{Top}$ auf Pushouts in $\texttt{Group}$ abbildet.
- Betrachte nun die Kategorie $\mathcal{C} = R\text{-}\texttt{Mod}$. Seien Moduln X, Y und Z und Modulhomomorphismen $s \colon X \to Z$ und $t \colon Y \to Z$ gegeben.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

Wähle $P := \{(x, y) \in X \oplus Y \colon s(x) = t(y)\}$. Seien $p_1 \colon P \to X$ und $p_2 \colon P \to Y$ die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Summanden. Dann gilt $p_1 s = p_2 t$.

Ist nun A ein weiterer Modul mit Homomorphismen $f_1 \colon A \to X$ und $f_2 \colon A \to Y$ mit $f_1 s = f_2 t$, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "(f_1,f_2)"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} s \\ -t \end{smallmatrix}\right)"] & Z. \end{tikzcd}$$

Daher existiert $g \colon A \to P$ als Faktorisierung über den Kern von $\left(\begin{smallmatrix} s \\ -t \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

- Betrachte wieder die Kategorie $\mathcal{C} = R\text{-}\mathtt{Mod}$. Seien Moduln X, Y und Z und Modulhomomorphismen $s\colon X \to Y$ und $t\colon X \to Z$ gegeben.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

Wähle $Q := (Y \oplus Z)/\langle s(x) - t(x)\colon x \in X\rangle$. Seien $q_1\colon Y \to Q$ und $q_2\colon Z \to Q$ die Morphismen gegeben durch Inklusion und Restklassenabbildung. Dann gilt $sq_1 = tq_2$.

Ist nun B ein weiterer Modul mit Homomorphismen $f_1\colon Y \to Q$ und $f_2\colon Z \to Q$ mit $sf_1 = tf_2$, so kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(s,-t)}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \oplus Z \arrow[r, "{\binom{f_1}{f_2}}"] & B \end{tikzcd}$$

Daher existiert $g\colon Q \to B$ als Faktorisierung über den Cokern von $(s, -t)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ Z \arrow[r, "q_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & Q \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

Insgesamt: In R-$\mathtt{Mod}$ (und auch in R-$\mathtt{mod}$) existieren Pullback und Pushout.

Bemerkung (Eigenschaften von Ext^1)

(1) Repräsentiert

$$\xi\colon 0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

die Äquivalenzklasse einer Erweiterung von B durch A und ist $f\colon C \to B$ ein Modulhomomorphismus, so definiere eine Abbildung $f\colon \operatorname{Ext}^1(B, A) \to \operatorname{Ext}^1(C, A)$ durch

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & X \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & P \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0, \end{tikzcd}$$

d.h. die Äquivalenzklasse der Erweiterung in der ersten Zeile wird auf die Äquivalenzklasse Erweiterung in der zweiten Zeile abgebildet. Hierbei ist P ein Pullback.

(2) Repräsentiert

$$\xi\colon 0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

die Äquivalenzklasse einer Erweiterung von B durch A und ist $g\colon A \to D$ ein Modulhomomorphismus, so definiere eine Abbildung $g\colon \operatorname{Ext}^1(B, A) \to \operatorname{Ext}^1(B, D)$ durch

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & D \arrow[r] & Q \arrow[r] & B \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

d.h. die Äquivalenzklasse der Erweiterung in der ersten Zeile wird auf die Äquivalenzklasse Erweiterung in der zweiten Zeile abgebildet. Hierbei ist Q ein Pushout.

(3) Wir definieren eine Addition in Ext^1, die sogenannte *Baer-Summe*. Dazu seien zwei Äquivalenzklassen in $\operatorname{Ext}^1(B, A)$ repräsentiert durch

$$\begin{aligned} \xi\colon 0 \xrightarrow{f_1} A \longrightarrow X \xrightarrow{g_1} B \longrightarrow 0 \\ \eta\colon 0 \xrightarrow{f_2} A \longrightarrow Y \xrightarrow{g_2} B \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Durch Summation und Bildung von Pullback P und Pushout Q erhalten wir das folgende kommutative Diagramm, wobei Δ die Diagonal- und ∇ die Codiagonalabbildung bezeichnet.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}"] & X \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}"] & B \oplus B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \oplus A \arrow[u, equal] \arrow[d, "\nabla"] \arrow[r] & P \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\llcorner", very near start] & B \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, equal] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & Q \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start] \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die Äquivalenzklasse der Erweiterung von B durch A in der letzten Zeile bildet die Bear-Summe $\xi + \eta \in \operatorname{Ext}^1(B, A)$.

(4) Die Bear-Summe macht $\operatorname{Ext}^1(B, A)$ zu einer abelschen Gruppe mit neutralem Element repräsentiert durch die zerfallende Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{(1,0)} A \oplus B \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} B \longrightarrow 0.$$

(5) Zudem kann eine externe Multiplikation definiert werden, das sogenannte *Yoneda-Produkt*: Sind zwei Erweiterungen der Form

$$\begin{aligned} \xi\colon 0 \xrightarrow{f_1} A \longrightarrow X \xrightarrow{g_1} B \longrightarrow 0 \ \in \operatorname{Ext}^1(B, A) \\ \eta\colon 0 \xrightarrow{f_2} B \longrightarrow Y \xrightarrow{g_2} C \longrightarrow 0 \ \in \operatorname{Ext}^1(C, B) \end{aligned}$$

gegeben, so definiere durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
& & & B \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

eine kurze exakte Sequenz der Länge 4. Damit kann eine Gruppe $\operatorname{Ext}^2(C, A)$ definiert werden, zusammen mit einer Multiplikation $\operatorname{Ext}^1(B, A) \times \operatorname{Ext}^1(C, B) \to \operatorname{Ext}^2(C, A)$.

7.5 Proposition *Sei $P \in R$-$\texttt{Mod}$. Dann sind äquivalent.*

(a) *P ist projektiv.*

(b) $\operatorname{Hom}_R(P, -)$ *ist exakt.*

(c) $\operatorname{Ext}^1_R(P, -) = 0$.

Ist A eine endlichdimensionale k-Algebra, so gilt

$$A \text{ ist halbeinfach} \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(-,-) = 0 \text{ auf } A\text{-}\texttt{mod}.$$

Bemerkung (Beziehung zwischen Hom und Ext^1) Sei

$$\xi\colon 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

ein Repräsentant $\xi \in \mathrm{Ext}^1(Z,X)$ und U ein Modul. Wir erhalten eine Abbildung $\mathrm{Hom}(U,Z) \to \mathrm{Ext}^1(U,X)$ durch $\alpha \mapsto \alpha(\xi)$, vgl. das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[u, equal] & P \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & U \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 0
\end{tikzcd}$$

Analog erhalten wir für einen Modul W eine Abbildung $\mathrm{Hom}(X,W) \to \mathrm{Ext}^1(Z,W)$ durch $\beta \mapsto \beta(\xi)$, siehe folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W \arrow[r] & Q \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(U,-)$ auf ξ erhalten wir somit die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,Z) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1(U,X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(U,Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(U,Z)
\end{tikzcd}$$

beziehungsweise durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(-,W)$ die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z,W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,W) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1(Z,W) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(Y,W) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(X,W).
\end{tikzcd}$$

Damit "repariert" Ext die mangelnde Exaktheit von Hom. Analog lässt sich ein Funktor Tor_1 definieren, der die Exaktheit des Tensorprodukts $\otimes$ repariert.

Mit Hilfe dieser exakten Sequenzen lässt sich $\mathrm{Ext}^1(Z,W)$ (oft) berechnen. Dazu wähle eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

mit Y projektiv. Dann ergibt sich die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z,W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,W) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hom}(X,W) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1(Z,W) \arrow[r] & \underbrace{\mathrm{Ext}^1(Y,W)}_{=0} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(X,W).
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Ext}^1(Z,W) = \mathrm{Hom}(X,W)/\operatorname{Im}(\varphi)$.

Beispiel Sei $Q = (1 \xrightarrow{\alpha} 2)$ und betrachte die Köcheralgebra kQ, sowie deren Rechtsmoduln. Seien $S_1 = (k \longrightarrow 0)$ und $S_2 = (0 \longrightarrow k)$ die beiden einfachen Moduln.

Wegen $S_2 = e_2A$ ist S_2 projektiv, daher gilt $\mathrm{Ext}^1(S_2,S_1) = 0$. Wir wollen $\mathrm{Ext}^1(S_1,S_2)$ bestimmen.

Beachte, dass kQ isomorph ist zur Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen. Wir wählen folgende exakte Sequenz.

$$0 \longrightarrow S_2 = e_2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \longrightarrow e_1A = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow S_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

Dies gibt die lang exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(S_1, S_2) = 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(e_1A, S_2) = 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(S_2, S_2) \simeq k \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(S_1, S_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(e_1A, S_2) = 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\operatorname{Ext}^1(S_1, S_2) \simeq k$.

8 Wie beschreibt man Modulkategorien?

Sei A eine endlichdimensionale Algebra. Wir beschreibt man die Kategorie A-`mod`? 10.04.2017

Objekte: Betrachte Moduln bis auf Isomorphie. Nach dem Satz von Krull-Remak-Schmidt (5.15) existiert für jeden A-Modul $M \in A$-`mod` eine Zerlegung

$$M \simeq M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

in unzerlegbare Moduln M_i. Diese ist eindeutig bis auf Reihenfolge und Isomorphie. Es ergeben sich folgende Probleme:

- Wie findet man die unzerlegbaren A-Moduln, falls es nur endlich viele gibt?
- Wie entscheidet man, ob man alle unzerlegbaren Moduln gefunden hat?
- Folgt die Endlichkeit der Anzahl unzerlegbarer Moduln bereits aus der Existenz einer oberen Schranke für ihre Dimension (Brauer-Thrall-Vermutung I)?

Morphismen: Wir ignorieren Isomorphismen. Mit den Zerlegungen in unzerlegbare Moduln $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ und $Y = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_\ell$ ist ein Element aus

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y) = \mathrm{Hom}_A(X_1 \oplus \ldots \oplus X_n, Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_\ell)$$

gegeben durch eine Matriz mit Einträgen in $\mathrm{Hom}_A(X_i, Y_j)$. Hier ergeben sich die Probleme:

- Wie beschreibt man Nichtisomorpismen zwischen unzerlegbaren Moduln?
- Falls es nur endlich viele unzerlegbare A-Moduln bis auf Isomorphie gibt, gibt es dann endlich viele Morphismen, sodass alle Nichtisomorphismen in der Kategorie Linearkombinationen von Produkten dieser Abbildungen sind?

  Suchen also: Minimales Erzeugendensystem für die Morphismen.

Beispiel Sei $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen, bzw. die Köcheralgebra zum Köcher $(\cdot \longrightarrow \cdot)$.

Betrachte die Idempotente $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Schreibe $\Diamond := k/k$. Dann gibt es genau drei unzerlegbare A-Moduln.

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = Ae_1 = S_1, \ \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = Ae_2 = P_2, \ \begin{pmatrix} \Diamond \\ k \end{pmatrix} = Ae_2/Ae_1 = S_2$$

Diese lassen sich mit Inklusion i und Projektion p wie folgt anordnen.

$$\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} \arrow[dr, two heads, "p"] & \\ \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ur, hook, "i"] & & \begin{pmatrix} \Diamond \\ k \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

Wir betrachten nun die Homomorphismenmengen zwischen den unzerlegbaren Moduln. Es ist $ip = 0$, also $\mathrm{Hom}(S_1, S_2) = 0$. Ebenso ist $\mathrm{Hom}(S_2, P_2) = \mathrm{Hom}(S_2, S_1) = \mathrm{Hom}(P_2, S_1) = 0$.

Für $\mathrm{Hom}(S_1, P_2)$ und $\mathrm{Hom}(P_2, S_2)$ betrachte die folgenden beiden Diagramme.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & k \arrow[d, "\lambda"] \\ k \arrow[r, "1"] & k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\mu"'] & k \arrow[d, "0"] \\ k \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

Wir erhalten, dass $\mathrm{Hom}(S_1, P_2) = k$ und $\mathrm{Hom}(P_2, S_2) = k$, zudem ist jedes Element in $\mathrm{Hom}(S_1, P_2)$ ein Vielfaches von i und jedes Element in $\mathrm{Hom}(P_2, S_2)$ ein Vielfaches von p.

Beispiel Sei $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen, bzw. die Köcheralgebra zum Köcher $(\cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot)$.

Hier gibt es bis auf Isomorphie sechs unzerlegbare Moduln, die sich wie oben mit Inklusionen i und Projektionen p wie folgt anordnen lassen.

$$\begin{tikzcd} & & \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} \arrow[dr, two heads, "p"] & & \\ & \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, two heads, "p"] & & \begin{pmatrix} \Diamond \\ k \\ k \end{pmatrix} \arrow[dr, two heads, "p"] & \\ \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ur, hook, "i"] & & \begin{pmatrix} \Diamond \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ur, hook, "i"] & & \begin{pmatrix} \Diamond \\ \Diamond \\ k \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

Wir oben erzeugen auch hier alle i und p zusammen alle Nichtisomorphismen.

Beispiel Sei $A_3 = k[x]/(x^2)$. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau zwei unzerlegbare A-Moduln: Den einfachen Modul k mit $x \cdot \bar{1} = 0$ und den projektiven Moduln ${}_A A$.

Wieder lassen sich diese beiden Moduln mit Inklusion i und Projektion p wie folgt anordnen.

$$\begin{tikzcd} & k[x]/(x^2) \arrow[dr, two heads, "p"] & \\ k \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, equal] & & k \end{tikzcd}$$

Beobachtung In den drei Beispielen oben steckt alle Information in gewissen exakten Sequenzen, in denen insgesamt alle unzerlegbaren Moduln und alle "erzeugenden" Morphismen vorkommen.

Frage Gegeben sei ein unzerlegbarer Modul X. Gibt es dann eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X' \longrightarrow 0$$

mit X' unzerlegbar und f und g gewisse "erzeugende" Morphismen? Analog gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} X \longrightarrow 0$$

mit analogen Eigenschaften?

Ist dabei im zweiten Fall X projektiv, so zerfällt die kurze exakte Sequenz, d.h. $E' \simeq X \oplus X''$ und wir erhalten aus dem X keine Informationen über das X''. Analog, ist im ersten Fall X injektiv, so zerfällt diese kurze exakte Sequenz und wieder erhalten wir keine Informationen über das X'.

Ziel Identifiziere und konstuiere solche exakte Sequenzen.

Dies leistet die *Auslander-Reiten-Theorie*, nach Maurice Auslander und Idun Reiten, $\sim$1975.

9 Irreduzible und beinahe zerfallende Morphismen

Wir unternehmen zwei Versuche, “minimale Erzeuger” von Morphismenmengen zu identifizieren.

9.1 Definition Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in A-$\mathtt{mod}$. Dann heißt f *irreduzibel* oder *irreduzible Abbildung*, falls (a) und (b) gelten.

(a) f ist weder split mono (d.h. Coretraktion) noch split epi (d.h. Retraktion).

(b) In jeder Faktorisierung $f = gh$ ist g ein split mono oder h ein split epi.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Bemerkung Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus. Dann faktorisiert f über sein Bild.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "\alpha"'] & & Y \\ & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur, hook, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Weiterhin ist α surjektiv und β injektiv. Ist nun f irreduzibel, so ist α zudem split mono oder β ist split epi.

Im ersten Fall ist dann α bijektiv, d.h. $\mathrm{Im}(f) \simeq X/\operatorname{Kern}(f) \simeq X$. Daher ist $\operatorname{Kern}(f) = 0$, also f injektiv. Im zweiten Fall ist β bijektiv, d.h. $\mathrm{Im}(f) = Y$, also ist f surjektiv.

Insgesamt gilt also: Ist f irreduzibel, so ist f entweder injektiv oder surjektiv.

Beispiel Sei $P = Ae$ ein unzerlegbarer projektiver Modul mit $\mathrm{rad}(Ae) \neq 0$. Sei $f\colon \mathrm{rad}(Ae) \hookrightarrow Ae$ die Inklusion. Dann ist $\operatorname{Cokern}(f) = Ae/\operatorname{rad}(Ae) = S = \bar{A}e$ einfach.

Wir wollen zeigen: f ist irreduzibel.

Zu (a): Offensichtlich ist f kein epi. *Angenommen*, f wäre ein split mono. Dann würde gelten $Ae \simeq \mathrm{rad}(Ae) \oplus S$, und wegen $\mathrm{rad}(Ae) \neq 0$ und Ae unzerlegbar also $\mathrm{rad}(Ae) = \mathrm{rad}(A)Ae = Ae$. Doch dann impliziert Nakayamas Lemma 3.16 $\mathrm{rad}(Ae) = 0$, *Widerspruch*.

Zu (b): Angenommen, es gibt die Faktorisierung 12.04.2017

$$\begin{tikzcd} \mathrm{rad}(Ae) \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Ae \\ & Z. \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Fall 1: Es ist h surjektiv. Da Ae projektiv, ist dann h split epi.

Fall 2: Es ist h nicht surjektiv. Dann ist $\mathrm{Im}(h) \subsetneq Ae$ ein echter Teilmodul. Da Ae unzerlegbar projektiv, ist $\mathrm{rad}(Ae) \subsetneq Ae$ der eindeutig maximale Teilmodul, also ist $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{rad}(Ae)$.

Doch dann faktorisiert h über $\mathrm{rad}(Ae)$, also gibt es $\tilde{h}$ mit $h = \tilde{h}f$. Also ist $f = gh = g\tilde{h}f$, also $g\tilde{h} = 1_{\mathrm{rad}(Ae)}$, da f injektiv. Doch dann ist g split mono.

Bemerkung Sei $f\colon X \to Y$ irreduzibel. Dann ist nach obiger Bemerkung f entweder mono oder epi. Ist f mono, so gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\ f\ } Y \longrightarrow \operatorname{Cokern}(f) \longrightarrow 0.$$

Ist f epi, so gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern}(f) \longrightarrow X \xrightarrow{\ f\ } Y \longrightarrow 0.$$

Ziel: Finde kurze exakte Sequenzen, in denen die beteiligten Morphismen irreduzibel sind.

9.2 Proposition *Sei*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\ f\ } Y \xrightarrow{\ g\ } Z \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln.

(a) *f ist irreduzibel genau dann, wenn es für alle $\varphi\colon M \to Z$ ein $\alpha\colon M \to Y$ mit $\varphi = \alpha g$ oder ein $\beta\colon Y \to M$ mit $g = \beta\varphi$ gibt.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \\
& M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ul, dotted, "\exists\alpha"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "\exists\beta"'] & Z \arrow[r] & 0 \\
& M \arrow[u, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

(b) *g ist irreduzibel genau dann, wenn es für alle $\psi\colon X \to N$ ein $\alpha\colon Y \to N$ mit $\psi = f\alpha$ oder ein $\beta\colon N \to Y$ mit $f = \psi\beta$ gibt.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"] & Y \arrow[dl, dotted, "\exists\alpha"] \\
& N &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"] & Y \\
& N \arrow[ur, dotted, "\exists\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung Betrachte in der Situation von Proposition 9.2 (a) den Fall $\varphi = \mathrm{id}\colon M = Z \to Z$. Falls dann ein solches α existiert, so gilt $\mathrm{id} = \alpha g$, also ist g ein split epi und die Sequenz zerfällt. Daher muss hier der zweite Fall eintreten.

Ist umgekehrt $\varphi = 0\colon M \to Z$ und exitiert ein solches β, so gilt $g = \beta 0$, also $g = 0$. Dann ist aber f ein Isomorphismus und die Sequenz erfällt wieder.

Insgesamt sehen wir, dass beide Fälle in Proposition 9.2 (a) notwendig sind.

Beweis von Proposition 9.2. Mit Hilfe der k-Dualität $\operatorname{Hom}_k(-,k) =: (-)^*$ sind die Aussagen (a) und (b) dual zueinander. Es genügt also, (a) zu zeigen.

Zu ($\Rightarrow$): Sei $f\colon X \to Y$ und $\varphi\colon M \to Z$. Sei E der Pullback der Morphismen φ und g. Wir erhalten eine weitere exakte Sequenz und insgesamt folgendes kommutatives Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\xi"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann gilt $f = \sigma\xi$. Da f irreduzibel, ist also entweder σ split mono oder ξ split epi.

Erster Fall: σ ist split mono. Dann zerfällt die obere Sequenz, also ist τ split epi. Somit gibt es $\gamma\colon M \to E$ mit $1_M = \gamma\tau$. Also ist

$$\varphi = 1_M\varphi = \gamma\tau\varphi = \gamma\xi g = \alpha g \quad \text{mit} \quad \alpha := \gamma\xi.$$

Zweiter Fall: ξ ist split epi. Dann gibt es $\delta\colon Y \to E$ mit $1_Y = \delta\xi$. Also ist

$$g = 1_Y g = \delta\xi g = \delta\tau\varphi = \beta\varphi \quad \text{mit} \quad \beta := \delta\tau.$$

Zu ($\Leftarrow$): Sei die Bedingung an g erfüllt. Zeige: f ist irreduzibel. Da die Sequenz nach Voraussetzung nicht zerfällt, ist f weder split mono noch split epi.

Seien nun $u\colon X \to W$ und $v\colon W \to Y$ gegeben mit $f = uv$. Da f injektiv ist, ist auch u injektiv. Betrachte folgendes Diagramm, wobei die Zeilen kurz exakte Sequenzen sind. Sei $M := \mathrm{Cokern}(u)$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hierbei existiert φ nach der universellen Eigenschaft des Cokerns, da $u(vg) = (uv)g = fg = 0$. Damit gilt dann auch $vg = \rho\varphi$.

Weiterhin ist W der Pullback der Morphismen φ und g: Wegen $vg = \rho\varphi$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $W \to P$ in den Pullback P von φ und g. Durch eine Diagrammjagd zeige nun, dass dieser Morphismus ein Isomorphismus ist, d.h. W ist bereits ein Pullback.

Nach Voraussetzung gibt es nun zwei Fälle.

Erster Fall: Es gibt ein $\alpha\colon M \to Y$ mit $\varphi = \alpha g$. Betrachte das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, dotted, "\exists\eta"] \arrow[drr, bend left, "1_M"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& W \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Hierbei existiert η nach der universellen Eigenschaft des Pullbacks. Somit ist $1_M = \eta\rho$. Daher ist ρ split epi, also zerfällt die obere Sequenz. Doch dann ist u split mono, also f irreduzibel.

Zweiter Fall: Es gibt ein $\beta\colon Y \to M$ mit $g = \beta\varphi$. Betrachte das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dotted, "\exists\mu"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "1_Y"'] & & \\
& W \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Wieder existiert μ nach der universellen Eigenschaft des Pullbacks. Somit ist $1_Y = \mu v$. Also ist v split epi, somit f irreduzibel. $\square$

9.3 Definition Seien X, Y und Z drei A-Moduln.

(a) Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt *links minimal*, falls für alle $\alpha \in \mathrm{End}(Y)$ mit $f\alpha = f$ stets $\alpha \in \mathrm{Aut}(Y)$ gilt.

(b) Ein Morphismus $g\colon Y \to Z$ heißt *rechts minimal*, falls für alle $\alpha \in \mathrm{End}(Y)$ mit $\alpha g = g$ stets $\alpha \in \mathrm{Aut}(Y)$ gilt.

(c) Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt *links beinahe zerfallend*, falls f nicht split mono ist und für alle $u\colon X \to U$, ebenfalls nicht split mono, es ein $\tilde{u}\colon Y \to U$ gibt mit $u = f\tilde{u}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "\exists\tilde{u}"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

(d) Ein Morphismus $g\colon Y \to Z$ heißt *rechts beinahe zerfallend*, falls g nicht split epi ist und für alle $v\colon V \to Z$, ebenfalls nicht split epi, es ein $\tilde{v}\colon V \to Y$ gibt mit $v = \tilde{v}g$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] & & Z \\ & V \arrow[ul, dotted, "\exists \tilde{v}"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

(e) Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ heißt *links minimal beinahe zerfallend*, falls (a) und (c) gelten.

(f) Ein Morphismus $g\colon Y \to Z$ heißt *rechts minimal beinahe zerfallend*, falls (b) und (d) gelten.

Bemerkung Falls in (c) für u auch split mono erlaubt wäre, so wähle $U = X$ und $u = 1_X$. Gibt es dann ein solches $\tilde{u}$, so gilt $1_X = f\tilde{u}$, d.h. f wäre split mono, also zerfallend.

Beispiel Sei Ae unzerlegbar projektiv und $g\colon \operatorname{rad}(Ae) \hookrightarrow Ae$ die Inklusion. Dann ist g nicht 19.04.2017
surjektiv, also kein split epi.

Sei auch $v\colon V \to Ae$ kein split Epi. Dann ist v nicht surjektiv, da Ae projektiv ist. Allerdings ist $\operatorname{rad}(Ae) \subsetneq Ae$ der eindeutig maximale Teilmodul, also folgt $\operatorname{Im}(v) \subseteq \operatorname{rad}(Ae)$, d.h. v faktorisiert über $\operatorname{rad}(Ae)$.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{rad}(Ae) \arrow[rr, hook, "g"] & & Ae \\ & V \arrow[ul, dotted, "\exists \tilde{v}"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Somit ist g rechts beinahe zerfallend.

Sei nun $\beta \in \operatorname{End}(\operatorname{rad}(Ae))$ mit $\beta g = g = 1_{\operatorname{rad}(Ae)}$. Da g injektiv ist, folgt $\beta = 1_{\operatorname{rad}(Ae)}$, also ist β insbesondere ein Automorphismus. Es folgt, dass g zudem rechts minimal ist, also ist g rechts minimal beinahe zerfallend.

9.4 Definition Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

in A-`mod` heißt *beinahe zerfallend Sequenz* (oder *Auslander-Reiten-Sequenz*) genau dann, wenn f links und g rechts minimal beinahe zerfallend ist.

9.5 Theorem *Sei*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz in A-`mod`. Dann sind äquivalent.

(a) *Die Sequenz ist beinahe zerfallend.*

(b) *X ist unzerlegbar und g ist rechts beinahe zerfallend.*

(c) *Z ist unzerlegbar und f ist links beinahe zerfallend.*

(d) *f ist links minimal beinahe zerfallend.*

(e) *g ist rechts minimal beinahe zerfallend.*

(f) *X und Z sind unzerlegbar und f und g sind irreduzibel.*

(Später: Hauptsatz: Solche Sequenzen existieren stets für X nicht injektiv und Z nicht projektiv.)

9.6 Lemma

(a) *Sei $f\colon X \to Y$ ein irreduzibler Monomorphismus. Dann ist $Z = \operatorname{Cokern}(f)$ unzerlegbar.*

(b) *Sei $g\colon Y \to Z$ ein irreduzibler Epimorphismus. Dann ist $X = \operatorname{Kern}(g)$ unzerlegbar.*

Beweis. Wir zeigen (b), durch Dualität folgt dann (a).

Sei also $g\colon Y \to Z$ irreduzibel und $X = \operatorname{Kern}(g)$ mit Inklusion $f\colon X \to Y$. *Annahme*: X ist zerlegbar, d.h. es gibt $X_1, X_2 \neq 0$ mit $X \simeq X_1 \oplus X_2$.

Seien $p_1\colon X \to X_1$ und $p_2\colon X \to X_2$ die Projektionen. Wegen Proposition 9.2 (b) gibt es entweder $\gamma_1\colon Y \to X_1$ mit $p_1 = f\gamma_1$ oder $\delta_1\colon Y \to X_1$ mit $f = p_1\delta_1$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[dl, dotted, "\exists\gamma_1"] \\ & X_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \\ & X_1 \arrow[ur, dotted, "\exists\delta_1"'] & \end{tikzcd}$$

Im zweiten Fall folgt jedoch, wegen f injektiv, aus $f = p_1\delta_1$ auch p_1 injektiv. Damit kann dieser Fall nicht eintreten. Also ist $p_1 = f\gamma_1$. Für p_2 erhalte analog $p_2 = f\gamma_2$.

Dann ist $1_X = (p_1, p_2) = (f\gamma_1, f\gamma_2) = f(\gamma_1, \gamma_2)$, also ist f split mono. Doch dann ist auch g split epi, im *Widerspruch* zu g irreduzibel. □

9.7 Lemma

(a) *Sei $f\colon X \to Y$ links beinahe zerfallend. Dann ist X unzerlegbar.*

(b) *Sei $g\colon Y \to Z$ rechts beinahe zerfallend. Dann ist Z unzerlegbar.*

Beweis. Wir zeigen (a), wieder folgt (b) aus Dualität.

Angenommen, X ist unzerlegbar, d.h. es ist $X \simeq X_1 \oplus X_2$ mit $X_1, X_2 \neq 0$. Seien $p_1\colon X \to X_1$ und $p_2\colon X \to X_2$ die Projektionen.

Dann sind p_1 und p_2 nicht split mono, also gibt es, da f links beinahe zerfallend ist, $\tilde{u}_1\colon Y \to X_1$ und $\tilde{u}_2\colon Y \to X_2$ mit $p_1 = f\tilde{u}_1$ und $p_2 = f\tilde{u}_2$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "\exists\tilde{u}_1"] \\ & X_1 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_2"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "\exists\tilde{u}_2"] \\ & X_2 & \end{tikzcd}$$

Dann ist $1_X = (p_1, p_2) = (f\tilde{u}_1, f\tilde{u}_2) = f(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. Also ist f split mono, im *Widerspruch* zu f links beinahe zerfallend. □

9.8 Lemma

(a) *Seien $f_1\colon X \to Y_1$ und $f_2\colon X \to Y_2$ links minimal beinahe zerfallend. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ mit $f_2 = f_1\varphi$.*

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[d, "\varphi", "\wr"'] \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & Y_2 \end{tikzcd}$$

(b) *Seien $g_1\colon Y_1 \to X$ und $f_2\colon Y_2 \to X$ rechts minimal beinahe zerfallend. Dann gibt es einen Isomorphismus $\psi\colon Y_1 \to Y_2$ mit $g_1 = \psi g_2$.*

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[d, "\psi"', "\wr"] \arrow[dr, "g_1"] & \\ & Z \\ Y_2 \arrow[ur, "g_2"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Wieder zeigen wir nur (a), aus Dualität folgt dann (b).

Da f_1 links beinahe zerfallend ist, gibt es $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ mit $f_2 = f_1\varphi$. Da f_2 links beinahe zerfallend ist, gibt es $\varphi'\colon Y_2 \to Y_1$ mit $f_1 = f_2\varphi'$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & Y_1 \arrow[dl, dotted, "\exists\varphi"] \\ & Y_2 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_2"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, dotted, "\exists\varphi'"] \\ & Y_1 & \end{tikzcd}$$

Dann ist $f_1 = f_2\varphi' = f_1\varphi\varphi'$ mit $\varphi\varphi' \in \mathrm{End}(Y_1)$, also wegen f_1 links minimal $\varphi\varphi' \in \mathrm{Aut}(Y_1)$. Umgekehrt ist $f_2 = f_1\varphi = f_2\varphi'\varphi$ mit $\varphi'\varphi \in \mathrm{End}(Y_2)$, also wegen f_2 links minimal $\varphi'\varphi \in \mathrm{Aut}(Y_2)$.

Aus $\varphi\varphi' \in \mathrm{Aut}(Y_1)$ folgt, dass φ split mono ist und aus $\varphi'\varphi \in \mathrm{Aut}(Y_2)$ folgt, dass φ split epi ist. Insgesamt ist φ also ein Isomorphismus. $\square$

9.9 Proposition

(a) *Sei $f\colon X \to Y$ links minimal beinahe zerfallend. Dann gilt:*

(i) Es ist f irreduzibel.

(ii) Es ist $f_1\colon X \to Y_1$ irreduzibel genau dann, wenn $Y_1 \neq 0$ und es eine Zerlegung $Y \simeq Y_1 \oplus Y_2$ gibt mit $f_2\colon X \to Y_2$, sodass $(f_1, f_2)\colon X \to Y_1 \oplus Y_2$ links minimal beinahe zerfallend ist.

(b) *Sei $g\colon Y \to Z$ rechts minimal beinahe zerfallend. Dann gilt:*

(i) Es ist g irreduzibel.

(ii) Es ist $g_1\colon Y_1 \to Z$ irreduzibel genau dann, wenn $Y_1 \neq 0$ und es eine Zerlegung $Y \simeq Y_1 \oplus Y_2$ gibt mit $g_2\colon Y_2 \to Z$, sodass $(g_1, g_2)^T\colon Y_1 \oplus Y_2 \to Z$ rechts minimal beinahe zerfallend ist.

Also: Falls links bzw. rechts minimal beinahe zerfallende Abbildungen existieren, so sind die irreduziblen Abbildungen gerade ihre direkten Summanden. In (a) ist X unzerlegbar, in (b) ist Z unzerlegbar.

Beispiel Betrachte den Kroneckerköcher $\cdot \rightrightarrows \cdot$. Dann ist die Wegealgebra kQ isomorph zur Algebra

$$kQ \simeq A = \begin{pmatrix} k & k \oplus k \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

wobei die Multiplikation erkärt ist durch

$$\begin{pmatrix} a & b + c \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' + c' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + ac' + bd' + cd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$Ae_1 = A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Ae_2 = A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \oplus k \\ k \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Inklusion

$$Ae_1 \oplus Ae_1 = \mathrm{rad}(Ae_2) \hookrightarrow Ae_2.$$

Nach einem vorherigen Beispiel ist diese irreduzibel und rechts minimal beinahe zerfallend.

Allerdings sind die Inklusionen der beiden Summanden $i_1\colon Ae_1 \to Ae_2$ und $i_2\colon Ae_1 \to Ae_2$ linear unabhängige irreduzible Abbildungen, insbesondere also echte direkte Summanden einer rechts minimal beinahe zerfallenden Abbildung.

Beweis von Proposition 9.9. Wir zeigen (a), aus Dualität folgt wieder (b).

Sei also $f\colon X \to Y$ links minimal beinahe zerfallend.

Ad (i). Nach Lemma 9.7 (a) ist X unzerlegbar. Falls f nun split epi ist, so ist $Y \mid X$ ein direkter Summand. Doch dann wäre $Y \simeq X$ da X unzerlegbar und f ein Isomorphismus, im Widerspruch zu f links minimal beinahe zerfallend. Nach Voraussetzung ist f zudem auch nicht split mono.

Sei nun $f = f_1 f_2$ eine Faktorisierung.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \\ & M \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

Falls f_1 split mono ist, so sind wir fertig.

Falls f_1 nicht split mono ist, so gibt es wegen f links beinahe zerfallend ein $\alpha\colon Y \to M$ mit $f_1 = f\alpha$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "\exists\alpha"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Also ist $f = f_1 f_2 = f(\alpha f_2)$. Da f links minimal ist, ist αf_2 also ein Automorphismus. Insbesondere ist f_2 split epi.

Damit ist f irreduzibel.

Ad (ii). Wir zeigen ($\Rightarrow$). Sei also $f_1\colon X \to Y_1$ irreduzibel. Dann ist $Y_1 \neq 0$ und f_1 ist kein split mono.

Wir oben gibt es wegen f links minimal beinahe zerfallend ein $\alpha\colon Y \to Y_1$ mit $f_1 = f\alpha$. Da f_1 irreduzibel ist, ist entweder f split mono oder α split epi. Da f jedoch als links beinahe zerfallender Morphismus nicht split mono ist, ist also α split epi.

Somit gibt es einen Isomorphismus $\gamma\colon Y \to Y_1 \oplus Y_2$. Mit $\alpha\colon Y \to Y_1$ und $Y_2 = \operatorname{Kern}(\alpha)$. Sei $\beta\colon Y_2 \to Y$ die Inklusion des Kerns. Insbesondere ist $\gamma = (\alpha, \beta)$.

Da f links minimal beinahe zerfallend ist, ist auch $f\gamma\colon X \to Y_1 \oplus Y_2$ links minimal beinahe zerfallend. Definiere $f_2 = f\beta$. Dann ist $f\gamma = f(\alpha, \beta) = (f\alpha, f\beta) = (f_1, f_2)$.

Wir zeigen ($\Leftarrow$). Sei $f_1\colon X \to Y_1$ ein solcher direkter Summand, d.h. es ist $(f_1, f_2)\colon X \to Y_1 \oplus Y_2$ links minimal beinahe zerfallend. Zeige: f_1 ist irreduzibel. 24.04.2017

Da X unzerlegbar ist, ist f_1 kein split Epi. Nach Voraussetzung ist (f_1, f_2) kein split Mono, also ist auch f_1 kein split Mono.

Sei nun $f_1 = \alpha\beta$ eine Faktorisierung von f_1.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y_1 \\ & M \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Ist α split mono, so sind wir fertig. Sei also α kein split Mono. Nach (i) ist (f_1, f_2) irreduzibel. Betrachte die Faktorisierung von (f_1, f_2) gegeben durch

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[dr, "{(\alpha,f_2)}"'] & & Y_1 \oplus Y_2 \\ & M \oplus Y_2 \arrow[ur, "\left(\begin{smallmatrix}\beta & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"'] & \end{tikzcd}$$

Wir *behaupten*, dass (α, f_2) kein split Mono ist. Dann folgt, dass $\left(\begin{smallmatrix}\beta & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ split epi ist, also dass β split epi ist. Dies zeigt dann, dass f_1 tatsächlich irreduzibel ist.

Da X unzerlegbar ist, ist $\mathrm{End}_A(X)$ ein lokaler Ring mit eindeutig maximalem Ideal gegeben durch das Radikal

$$\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(X)) = \{f \in \mathrm{End}_A(X) : f \text{ ist kein Isomorphismus}\}$$

Betrachte die Abbildung $\alpha \cdot -\colon \mathrm{Hom}_A(M, X) \to \mathrm{Hom}_A(X, X) = \mathrm{End}_A(X)$. Da α kein split Mono ist, ist $\alpha \cdot -$ nicht surjektiv, d.h. das Bild liegt im Radikal. Analog ist auch die Abbildung $f_2 \cdot -\colon \mathrm{Hom}_A(Y_2, X) \to \mathrm{Hom}_A(X, X)$ nicht surjektiv, hat also ebenfalls ein Bild im Radikal.

Doch dann hat, schließlich ist das Radikal ein Ideal, auch die zusammengesetzte Abbildung $(\alpha, f_2) \cdot -\colon \mathrm{Hom}_A(M \oplus Y_2) \to \mathrm{Hom}_A(X, X)$ ein Bild im Radikal, also kann (α, f_2) kein split Mono sein. □

9.10 Korollar *Seien zwei beinahe zerfallende Sequenzen gegeben.*

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow X_2 \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{g_2} Z_2 \longrightarrow 0$$

Dann sind äquivalent.

(a) $X_1 \simeq X_2$.

(b) $Z_1 \simeq Z_2$.

(c) *Es gibt einen Isomorphismus von kurzen exakten Sequenzen.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\wr"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\wr"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] & Z_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 9.8. □

Beweis von Theorem 9.5. (a) ⇒ (d) und (a) ⇒ (e) folgen direkt aus der Definition.

(a) ⇒ (b) und (a) ⇒ (c) folgen mit Lemma 9.7 aus (d) und (e).

(a) ⇒ (f) folgt schließlich mit Proposition 9.9. Insgesamt impliziert (a) also alle anderen Aussagen.

(e) ⇒ (b): Da g rechts minimal beinahe zerfallend ist, ist g nach Proposition 9.9 irreduzibel, also ist mit Lemma 9.6 (b) $\mathrm{Kern}(g) \simeq X$ unzerlegbar.

(d) ⇒ (c): Diese Aussage ist analog zu (e) ⇒ (b) oder folgt durch Dualität.

(b) ⇒ (c): Da g rechts beinahe zerfallend ist, impliziert Lemma 9.7 dass Z unzerlegbar ist. Noch zu zeigen: f ist links beinahe zerfallend.

Ebenfalls folgt aus g rechts beinahe zerfallend, dass g nicht split epi ist. Somit ist die kurze exakte Sequenz nicht zerfallend, also ist f kein split Mono.

Zeige also: Ist $u\colon X \to U$ gegeben, so ist u entweder split mono oder es existiert ein u' mit $u = fu'$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & Y \arrow[dl, dotted, "\exists u'"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Sei P der Pushout von f und u. Dann ist folgendes Diagramm mit exakten Zeilen kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "h"] & P \arrow[r, "j"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Falls nun die untere Sequenz zerfällt, so existiert $h'\colon P \to U$ mit $1_U = hh'$. Dann ist

$$u = u1_u = uhh' = fvh' = f(vh') = fu' \quad \text{mit} \quad u' = vh'.$$

Falls nicht, so ist j nicht split epi, also gibt es, da g rechts beinahe zerfallend ist, ein $v'\colon P \to Y$ mit $j = v'g$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] & & Z \\ & P \arrow[ul, dotted, "\exists v'"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Dann ist $g = vj = v(v'g) = (vv')g$, also auch $g = (vv')^n g$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Es ist $(hv')g = hj = 0$, also existiert $u'\colon U \to X$ mit $hv' = u'f$ als Faktorisierung über den Kern von g. Sei $\varphi := uu'\colon X \to X$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend right, "\varphi"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u'"] & P \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v'"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Es ist $\varphi \in \mathrm{End}_A(X)$. Da X unzerlegbar, ist $\mathrm{End}_A(X)$ ein lokaler Ring. Also ist φ entweder ein Automorphismus oder nilpotent.

Ist φ allerdings nilpotent, so ist $\varphi^n = 0$ für ein n. Dann ist

$$0f = \varphi^n f = \varphi^{n-1} f(vv') = \ldots = f(vv')^n,$$

also faktorisiert $(vv')^n$ über den Cokern von f, d.h. es gibt $\psi\colon Z \to Y$ mit $(vv')^n = g\psi$. Dann gilt $g = g1_Z = (vv')^n g = g\psi g$. Da g jedoch epi ist, folgt daraus $1_Z = \psi g$, d.h. die Sequenz zerfällt, *Widerspruch*.

Somit muss $\varphi = uu'$ ein Automorphismus sein, also u split mono.

(c) $\Rightarrow$ (b) folgt analog. Dies zeigt insgesamt die Äquivalenz (b) $\Leftrightarrow$ (c).

(b), (c) $\Rightarrow$ (a): Zeige: f ist minimal (g minimal folgt analog). Sei also $\alpha \in \mathrm{End}_A(Y)$ mit $f\alpha = f$. Zeige: α ist ein Automorphismus.

Da $f\alpha g = fg = 0$, faktorisiert αg über den Cokern von f, d.h. es gibt $\beta\colon Z \to Z$ mit $\alpha g = g\beta$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{$*$}$$

Somit ist $\beta \in \mathrm{End}_A(Z)$. Da jedoch Z unzerlegbar ist, ist $\mathrm{End}_A(Z)$ lokal. Also ist β entweder ein Automorphismus oder nilpotent.

Ist β nilpotent, so ist $\beta^n = 0$ für ein $n \in \mathbf{N}$. Also ist

$$0 = g0 = g\beta^n = \alpha g \beta^{n-1} = \ldots = \alpha^n g.$$

Somit faktorisiert α^n über den Kern von g, d.h. es gibt $\gamma\colon Y \to X$ mit $\alpha^n = \gamma f$. Doch dann ist $1_X f = f = f\alpha^n = f\gamma f$, also $1_X = f\gamma$, da f mono. Wir erhalten einen *Widerspruch*, da die Sequenz nicht zerfällt.

Also ist β ein Automorphismus. Über eine Diagrammjagd in $(*)$ impliziert dies jedoch auch, dass α ein Automorphismus ist, also f minimal ist.

(f) $\Rightarrow$ (b): Es ist X unzerlegbar nach Voraussetzung. Zeige also: g ist rechts beinahe zerfallend. Da g irreduzibel ist, ist g nicht split epi. Sei also $v\colon V \to Z$ gegeben mit v nicht split epi.

Es ist $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ eine direkte Summe von unzerlegbaren Moduln, ebenso zerlegt sich $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Es genügt den Fall V unzelegbar zu betrachten.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \\ & & & V \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, dotted, "\exists \tilde{v}?"] & \end{tikzcd}$$

Nach Proposition 9.2 gibt es, da f irreduzibel ist, entweder $\tilde{v}\colon V \to Y$ mit $v = \tilde{v}g$ oder es gibt $\beta\colon Y \to V$ mit $g = \beta v$.

Im ersten Fall sind wir fertig, im zweiten Fall ist β, da g irreduzibel ist und v nicht split epi, zwangsläufig split mono. Da jedoch V unzerlegbar ist, muss β ein Isomorphismus sein, also ist $v = \tilde{v}g$ mit $\tilde{v} = \beta^{-1}$. $\square$

10 Die Auslander-Reiten Verschiebung

Wir wollen eine Beziehung zwischen den Moduln X und Z in kurzen exakten Sequenzen 26.04.2017

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

herstellen. Dazu betrachte die *k-Dualität* $\operatorname{Hom}_k(-,k) = D(-)\colon A\text{-}\mathtt{mod} \to A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{mod}$. Nach Proposition 1.12 ist dies eine kontravariante Äquivalenz.

Analog können wir auch den Funktor $\operatorname{Hom}_A(-,A) =: (-)^{\mathrm{t}}\colon A\text{-}\mathtt{mod} \to A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{mod}$ betrachten. Auch dies ist ein kontravarianter Funktor, jedoch im Allgemeinen keine Äquivalenz, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra der oberen 2×2-Matrizen. Sei $A = P_1 \oplus P_2$ die Zerlegung von A in projektiv unzerlegbare Moduln, mit dem einfachen eindimensionalen projektiven Modul $P_1 = S_1 = Ae_1$ und dem zweidimensionalen projektiven Moduln $P_2 = Ae_2$.

Es gibt die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$$

mit dem einfachen Modul S_2. Nach Schurs Lemma ist nun $\operatorname{Hom}_A(S_2, P_1) = \operatorname{Hom}_A(S_2, S_1) = 0$. Wäre nun $\operatorname{Hom}_A(S_2, P_2) \neq 0$, so gäbe es $0 \neq f\colon S_2 \to P_2$. Dann müsste $\operatorname{Im}(f) \cap S_1 = \{0\}$ gelten, und damit $P_2 \simeq S_1 \oplus S_2$, im Widerspruch zu P_2 unzerlegbar. Also ist auch $\operatorname{Hom}_A(S_2, P_2) = 0$.

Doch dann ist $\operatorname{Hom}_A(S_2, A) = 0$, d.h. $(S_2)^{\mathrm{t}} = 0$ mit $S_2 \neq 0$.

Sei nun A wieder eine beliebige k-Algebra. Für einen projektiven Modul $M = Ae$ gilt dann $\operatorname{Hom}_A(Ae, A) \simeq eA$. Es folgt, dass $(M^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = M$, d.h. die Einschränkung von $(-)^{\mathrm{t}}$ auf projektive Moduln

$$(-)^{\mathrm{t}}\colon A\text{-}\mathtt{proj} \to A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{proj}$$

ist eine kontravariante Äquivalenz.

Sei nun M ein beliebiger Modul in A-$\mathtt{mod}$. Dann gibt es eine *projektive Präsentation*

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0,$$

d.h. die Sequenz ist exakt mit P_0 und P_1 projektiv. Beachte, dass M als Cokern von p_1 bereits vollständig durch $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0$ bestimmt ist. Dagegen ist eine projektive Präsentation von M nicht eindeutig bestimmt, es gibt allerdings eine eindeutige *minimale projektive Präsentation.*

Dazu betrachte den halbeinfachen Modul $M/\operatorname{rad}(M)$. Dann gibt es $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{N}_0$, sodass $M/\operatorname{rad}(M) \simeq S_1^{a_1} \oplus \ldots \oplus S_n^{a_n}$ ist, wobei $S_1, \ldots, S_n$ die einfachen A-Moduln sind. Jedes S_i hat die *projektive Decke* $Ae_i \to S_i \simeq Ae_i/\operatorname{rad}(Ae_i)$, daher existiert ein Epimorphismus

$$P_0 := (Ae_1)^{a_1} \oplus \ldots \oplus (Ae_n)^{a_n} \twoheadrightarrow S_1^{a_1} \oplus \ldots \oplus S_n^{a_n} = M/\operatorname{rad}(M).$$

Sei $\pi\colon M \twoheadrightarrow M/\operatorname{rad}(M)$ die Quotientenabbildung.

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dotted, "\exists p_0"'] \arrow[d, two heads] & \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/\operatorname{rad}(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da P_0 projektiv ist, existiert $p_0\colon P_0 \to M$. Da $p_0\pi\colon P_0 \to M$ surjektiv ist, impliziert Nakayamas Lemma, dass bereits p_0 surjektiv ist (beachte $P_0/\operatorname{rad}(P_0) = M/\operatorname{rad}(M)$).

Noch zu zeigen ist, dass dieses P_0 wirklich minimal ist. Sei dazu auch Q projektiv mit einem Epimorphismus $q\colon Q \twoheadrightarrow M$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[d, two heads, "q_0"] \arrow[dl, dotted, "\exists\varphi"'] & \\
 & M \arrow[d, two heads, "\pi"] & \\
P_0 \arrow[r, two heads] & M/\operatorname{rad}(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da Q projektiv ist, existiert $\varphi\colon Q \to P_0$. Wegen $M/\operatorname{rad}(M) = P_0/\operatorname{rad}(P_0)$ ist φ damit surjektiv modulo dem Radikal, also ist φ surjektiv nach Nakayamas Lemma. Da jedoch P_0 projektiv ist, ist φ damit split epi und somit $P_0 \mid Q$ ein direkter Summand. Daher ist P_0 tatsächlich minimal, also *die* projektive Decke von M.

Bilden wir nun P_1 als projektive Decke von $\operatorname{Kern}(p_0)$, so erhalten wir die *eindeutige* minimale projektive Präsentation $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0$ von M.

Sei nun M mit einer minimalen projektiven Präsentation $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0$ gegeben. Dann wende den Funktor $(-)^{\mathrm{t}} = \operatorname{Hom}_A(-, A)$ auf die exakte Sequenz

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

an, d.h. wir erhalten auf Grund der Linksexaktheit des Hom-Funktors die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, A) = M^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_0^{\mathrm{t}}} \operatorname{Hom}_A(P_0, A) = P_0^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_1^{\mathrm{t}}} \operatorname{Hom}_A(P_1, A) = P_1^{\mathrm{t}}$$

Zusammen mit dem Cokern von p_1^{t} ergibt sich daraus die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_0^{\mathrm{t}}} P_0^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_1^{\mathrm{t}}} P_1^{\mathrm{t}} \longrightarrow \operatorname{Cokern}(p_1^{\mathrm{t}}) \longrightarrow 0. \tag{$*$}$$

10.1 Definition Sei $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$. Dann heißt $\operatorname{Cokern}(p_1^{\mathrm{t}})$ in $(*)$ der zu M *transponierte Modul*. Wir schreiben $\operatorname{Tr} M := \operatorname{Cokern}(p_1^{\mathrm{t}})$.

Bemerkung Sei M projektiv. Dann ist $0 \xrightarrow{p_1=0} P_0$ mit $P_0 = M$ bereits eine minimale projektive Präsentation von M, insbesondere ist $P_1 = 0$. Also ist auch $p_1^{\mathrm{t}} = 0$, d.h. $\operatorname{Tr} M = \operatorname{Cokern}(p_1^{\mathrm{t}}) = 0$.

10.2 Proposition *Seien M und N unzerlegbare A-Moduln. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{Tr} M$ *hat keinen nichttrivialen (d.h. $\neq 0$) projektiven Summanden.*

(b) *Für M nicht projektiv ist $P_0^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_1^{\mathrm{t}}} P_1^{\mathrm{t}}$ eine minimale projektive Präsentation von* $\operatorname{Tr} M$.

(c) *Es ist M projektiv genau dann, wenn* $\operatorname{Tr} M = 0$ *ist.*

(d) *Ist M nicht projektiv, so ist* $\operatorname{Tr} M$ *unzerlegbar und es ist* $\operatorname{Tr}(\operatorname{Tr} M) \simeq M$.

(e) *Sind M und N nicht projektiv, so ist $M \simeq N$ genau dann, wenn* $\operatorname{Tr} M \simeq \operatorname{Tr} N$.

Beweis. Ad (c): Ist M projektiv, so ist $\operatorname{Tr} M = 0$ nach obiger Bemerkung. Ist umgekehrt $\operatorname{Tr} M = 0$, so ist p_1^{t} wegen $\operatorname{Tr} M = \operatorname{Cokern}(p_1^{\mathrm{t}})$ surjektiv. Da P_0^{t} projektiv, ist p_1^{t} also split epi, d.h. p_1 ist split mono. Also ist $P_1 \mid P_0$ ein direkter Summand. Wegen der Minimalität der Präsentation muss dann allerdings $P_1 = 0$ gelten, also $P_0 \simeq M$. Damit ist M projektiv.

Ad (b): *Angenommen*, P_1^{t} oder P_0^{t} hat überflüssige Summanden.

Im ersten Fall, sei $P_1^{\mathrm{t}} = Q_0 \oplus Q_1$ und sei $Q_0 \twoheadrightarrow \operatorname{Tr} M$ die projektive Decke. Dann liegt Q_1 im Kern von p_1^{t}, also muss $P_0^{\mathrm{t}} \twoheadrightarrow Q_1$ auf den projektiven Modul Q_1 abbilden, d.h. es gilt $Q_1 \mid P_0^{\mathrm{t}}$. Damit ist $P_0^{\mathrm{t}} = Q_1 \oplus Q_2$ mit einem projektiven Modul Q_2 und $p_1 = (p_1^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ hat den direkten Summanden $Q_1^{\mathrm{t}} \to Q_1^{\mathrm{t}}$. Doch dann kann die gewählte projektive Präsentation nicht minimal gewesen sein, *Widerspruch.*

Im zweiten Fall, sei $P_0^{\mathrm{t}} = Q \oplus Q'$ mit Q im Kern von p_1^{t}. Dann hat p_1^{t} den Summanden $Q \to 0$, also hat p_1 den Summanden $0 \to Q^{\mathrm{t}}$. Doch dann muss $M = \operatorname{Cokern}(p_1)$ auch Q^{t} als direkten Summanden haben, im Widerspruch zu M unzerlegbar.

Ad (d): Nach (b) ist $P_0^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_1^{\mathrm{t}}} P_1^{\mathrm{t}}$ eine minimale projektive Präsentation von $\operatorname{Tr} M$. Wir wenden $(-)^{\mathrm{t}}$ auf die exakte Sequenz

$$P_0^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_1^{\mathrm{t}}} P_1^{\mathrm{t}} \longrightarrow \operatorname{Tr} M \longrightarrow 0$$

an und erhalten mit den entsprechenden Cokernen das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\operatorname{Tr} M)^{\mathrm{t}} \arrow[r] & (P_1^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \arrow[r, "(p_1^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}"] \arrow[d, "\wr"] & (P_0^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \operatorname{Cokern}((p_1^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}) = \operatorname{Tr}(\operatorname{Tr} M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & P_1 \arrow[r, "p_1"] & P_0 \arrow[r] & \operatorname{Cokern}(p_1) = M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die beiden vertikalen Morphismen links sind Isomorphismen, also ist auch der vertikale Morphismus rechts ein Isomorphismus, d.h. es ist $M \simeq \operatorname{Tr}(\operatorname{Tr} M)$.

Ad (a) und (e): Dies folgt nun aus (d). $\square$

Nun wollen wir Kategorien definieren, zwischen denen Tr eine kontravariante Äquivalenz wird. Dazu betrachte für $X, Y \in A\text{-}\mathtt{mod}$ die Menge

$$\mathcal{P}(X,Y) = \{f \colon X \to Y : \exists P \text{ projektiv und } f_1 \colon X \to P, f_2 \colon P \to Y \text{ mit } f = f_1 f_2\}\,.$$

D.h. es ist $f \in \mathcal{P}(X,Y)$ genau dann, wenn eine Faktorisierung von f über einen projektiven Modul P existiert.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \\
& P \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann bilden die Objekte von $A\text{-}\mathtt{mod}$ zusammen mit alles Morphismen der Form $\mathcal{P}(X,Y)$ ein *Ideal* von $A\text{-}\mathtt{mod}$, d.h. gegeben $f \in \mathcal{P}(X,Y)$ und $g \in \operatorname{Hom}(Y,Z)$, so ist $fg = f_1 f_2 g = f_1(f_2 g)$, also faktorisiert auch fg über P und damit gilt $fg \in \mathcal{P}(X,Z)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
& P \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[urr, bend right, "f_2 g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Analog gilt dies auch für Multiplikation von links. Zudem ist für $f, g \in \mathcal{P}(X,Y)$ mit Faktorisierungen über projektive Moduln

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & Y \\
& P \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g_1"'] & & Y \\
& Q \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

eine Faktorisierung von $f+g$ über den projektiven Modul $P \oplus Q$ gegeben durch

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f+g"] \arrow[dr, "(f_1,g_2)"'] & & Y \\ & P \oplus Q. \arrow[ur, "\binom{f_2}{g_2}"'] & \end{tikzcd}$$

Damit können wir eine neue Kategorie definieren als *Quotientenkategorie*: Dabei verwenden wir dieselben Objekten wie in A-$\mathtt{mod}$, allerdings mit Morphismen $\mathrm{Hom}_A(X,Y)/\mathcal{P}(X,Y)$, d.h. Äquivalenzklassen von Morphismen in A-$\mathtt{mod}$ unter der Relation $f \sim g \Leftrightarrow f-g \in \mathcal{P}(X,Y)$.

Ist P projektiv, so faktorisiert die Identität $1_P = 1_P 1_P$ über P, also ist $1_P = 1_P - 0_P \in \mathcal{P}(X,Y)$. Somit ist $1_P \sim 0_P$, also $P \simeq 0$ in der Quotientenkategorie.

Diese Quotientenkategorie heißt *(projektiv) stabile (Modul-)Kategorie* und wird bezeichnet mit A-$\underline{\mathtt{mod}}$. Analog, wenn Faktorisierungen über projektive durch Faktorisierungen über injektive Moduln ersetzt werden, erhalten wir die *injektiv stabile (Modul-)Kategorie*, bezeichnet mit A-$\overline{\mathtt{mod}}$.

Im Allgemeinen sind stabile Kategorien nicht abelsch.

10.3 Proposition *Die Zuordnung $X \mapsto \mathrm{Tr}\, X$ definiert eine k-lineare Dualität* 03.05.2017

$$\mathrm{Tr}\colon A\text{-}\underline{\mathtt{mod}} \to A^{\mathrm{op}}\text{-}\underline{\mathtt{mod}}.$$

Zur Vorbereitung zum Beweis: Definiere die Kategorie $\mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj})$, die sogenannte *Morphismenkategorie* von A-$\mathtt{proj}$, durch die folgenden Daten.

- *Objekte*: Ein Objekt ist ein Morphismus $f\colon P_1 \to P_0$, d.h. ein Tripel aus zwei projektiven Moduln $P_0, P_1 \in A$-$\mathtt{proj}$ und einem Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_A(P_1, P_0)$.
- *Morphismen*: Ein Morphismus zwischen $f\colon P_1 \to P_0$ und $g\colon Q_1 \to Q_0$ ist ein Paar (α, β) aus einem Morphismus $\alpha\colon P_1 \to Q_1$ und $\beta\colon P_0 \to Q_0$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[d, "\beta"] \\ Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \end{tikzcd}$$

- *Komposition*: Sind $(\alpha,\beta)\colon f \to g$ und $(\gamma,\delta)\colon g \to h$ zwei Morphismen in $\mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj})$, so definiere deren Komposition durch $(\alpha,\beta)(\gamma,\delta) := (\alpha\gamma, \beta\delta)$.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dd, bend right, "\alpha\gamma"'] & P_0 \arrow[d, "\beta"] \arrow[dd, bend left, "\beta\delta"] \\ Q_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma"'] & Q_0 \arrow[d, "\delta"] \\ R_1 \arrow[r, "h"] & R_0 \end{tikzcd}$$

Ist nun $(\alpha,\beta)\colon f \to g$ ein Morphismus in $\mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj})$, so können wir die beiden Zeilen im entsprechenden kommutativen Diagramm durch die Cokerne $X = \mathrm{Cokern}(f)$ und $Y = \mathrm{Cokern}(g)$ zu exakten Sequenzen fortsetzen.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists u"] & 0 \\ Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \arrow[r, two heads, "\pi_Y"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dann gilt $f\beta\pi_Y = \alpha g\pi_Y = 0$, also faktorisiert $\beta\pi_Y$ über den Cokern von f, d.h. es gibt $u\colon X \to Y$ mit $\beta\pi_Y = u\pi_X$.

Wir erhalten einen Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj}) & \longrightarrow & A\text{-}\mathtt{mod} \\ (f\colon P_1 \to P_0) & \longmapsto & \mathrm{Cokern}(f) \\ ((\alpha,\beta)\colon f \to g) & \longmapsto & (u\colon \mathrm{Cokern}(f) \to \mathrm{Cokern}(g)) \text{ wie oben beschrieben.} \end{array}$$

Sei nun $F\colon \mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj}) \to A\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$ die Komposition dieses Funktors mit dem kanonischen Restklassenfunktor $A\text{-}\mathtt{mod} \twoheadrightarrow A\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$. Wir wollen die Morphismen bestimmen, die unter F auf den Nullmorphismus abgebildet werden.

Sei also wieder $(\alpha,\beta)\colon f \to g$ ein Morphismus in $\mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj})$ mit dem $u\colon X \to Y$ wie oben konstruiert, d.h. $X = \mathrm{Cokern}(f)$ und $Y = \mathrm{Cokern}(g)$.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \arrow[r, two heads, "\pi_Y"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Gilt nun $F(\alpha,\beta) = 0$, so ist die Restklasse von u in $A\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$ der Nullmorphismus, d.h. u faktorisiert über einen projektiven Modul Z. Damit gibt es $\gamma\colon X \to Z$ und $\delta\colon Z \to Y$ mit $u = \gamma\delta$.

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[rr, two heads, "\pi_X"] \arrow[dd, "\beta"'] & & X \arrow[r] \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dd, "u"] & 0 \\ & Z \arrow[dl, dotted, "\exists\varepsilon"'] \arrow[dr, "\delta"] & & \\ Q_0 \arrow[rr, two heads, "\pi_Y"] & & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nun ist π_Y surjektiv und Z projektiv, also gibt es $\varepsilon\colon Z \to Q_0$ mit $\delta = \varepsilon\pi_Y$. Dann gilt aber $u = \delta\gamma = \delta\varepsilon\pi_Y$, d.h. u faktorisiert über Q_0. Sei $\varphi := \gamma\varepsilon\colon X \to Q_0$. Damit erhalten wir folgendes Diagramm, in dem alle Quadrate und das untere rechte Dreieck kommutiert.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d, "\beta"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] \arrow[dl, "\varphi"'] & 0 \\ Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \arrow[r, two heads, "\pi_Y"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nun wollen wir φ hochheben zu einem Morphismus $h\colon P_0 \to Q_1$ mit gewissen Bedingungen an h. Nach Konstruktion gilt $u = \varphi\pi_Y$, also ist

$$(\beta - \pi_X\varphi)\pi_Y = \beta\pi_Y - \pi_X\varphi\pi_Y = \pi_X u - \pi_X u = 0.$$

Damit faktorisiert $\beta - \pi_X\varphi\colon P_0 \to Q_0$ über den Kern von π_Y, also das Bild von g. Allerdings bildet g surjektiv auf sein Bild $\mathrm{Im}(g)$ ab, somit existiert, da P_0 projektiv, ein $h\colon P_0 \to Q_1$ mit $hg = \beta - \pi_X\varphi$.

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] \arrow[d, "\beta-\pi_X\varphi"] \\ Q_1 \arrow[r, two heads, "g"] & \mathrm{Im}(g) \end{tikzcd}$$

Insbesondere erfüllt das h dann $fhg = f(\beta - \pi_X\varphi) = f\beta - f\pi_X\varphi = f\beta$.

Also: Ist $F(\alpha,\beta) = 0$ in $A\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$, so existiert $h\colon P_0 \to Q_1$ mit $fhg = f\beta$.

Nun zeige: Existiert ein $h\colon P_0 \to Q_1$ mit $fhg = f\beta$, so ist $F(\alpha,\beta) = 0$ in A-$\underline{\texttt{mod}}$.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dl, "h"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] \arrow[dl, dotted, "\exists\varphi"'] & 0 \\
Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \arrow[r, two heads, "\pi_Y"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist $f(\beta - hg) = 0$, d.h. $\beta - hg$ faktorisiert über den Cokern von f. Somit gibt es $\varphi\colon X \to Q_0$ mit $\beta - hg = \pi_X\varphi$. Doch dann ist

$$\pi_X\varphi\pi_Y = (\beta - hg)\pi_Y = \beta\pi_Y - hg\pi_Y = \pi_X u,$$

also $u = \varphi\pi_Y$ da π_X epi ist. Somit faktorisiert u über den projektiven Modul Q_0, also ist $F(\alpha,\beta) = 0$ in A-$\underline{\texttt{mod}}$.

Ergebnis: $F(\alpha,\beta) = 0$ *genau dann, wenn es* $h\colon P_0 \to Q_1$ *gibt mit* $fhg = f\beta$.

10.4 Lemma *Es ist*

$$\mathrm{Mor}_1(A\text{-}\texttt{proj}) = \begin{cases} \textit{alle Objekte in } \mathrm{Mor}(A\text{-}\texttt{proj}) \\ \textit{Morphismen } (\alpha,\beta) \textit{ mit } F(\alpha,\beta) = 0 \textit{ in } A\text{-}\underline{\texttt{mod}} \end{cases}$$

ein Ideal in $\mathrm{Mor}(A\text{-}\texttt{proj})$ *und der Funktor* F *induziert eine Äquivalenz*

$$\mathrm{Mor}(A\text{-}\texttt{proj}) / \mathrm{Mor}_1(A\text{-}\texttt{proj}) \simeq A\text{-}\underline{\texttt{mod}}.$$

Beweis. Wir überprüfen, dass $\mathrm{Mor}_1(A\text{-}\texttt{proj})$ ein Ideal ist. Für die Addition, addiere einfach die entsprechenden Morphismen $h\colon P_0 \to Q_1$.

Für die Multiplikation, sei $(\alpha,\beta)\colon f \to f'$ ein Morphismus in $\mathrm{Mor}_1(A\text{-}\texttt{proj})$. Dann gibt es $h\colon P_0 \to Q_1$ mit $fhf' = f\beta$. Sei auch $(\gamma,\beta)\colon f' \to f''$ ein Morphismus. Setze $h' := h\gamma\colon P_0 \to R_1$. Dann gilt

$$fh'f'' = fh\gamma f'' = fhf'\delta = f\beta\delta.$$

Damit ist auch $(\alpha,\beta)(\gamma,\delta) = (\alpha\gamma,\beta\delta) \in \mathrm{Mor}_1(A\text{-}\texttt{proj})$.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, "h"'] \\
Q_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\gamma"'] & Q_0 \arrow[d, "\delta"] \\
R_1 \arrow[r, "f''"] & R_0
\end{tikzcd}$$

Analoges gilt auch für Multiplikation von links.

Für die behauptete Äquivalenz genügt es zu zeigen, dass F surjektiv (bis auf Isomorphie) auf Objekten und Morphismen ist.

Sei also $u\colon X \to Y$ ein Morphismus in A-$\texttt{mod}$. Wähle $\pi_X : P_0 \twoheadrightarrow X$ und $\pi_Y : Q_0 \twoheadrightarrow Y$ mit P_0 und Q_0 projektiv. Dann gibt es $\beta\colon P_0 \to Q_0$ mit $\pi_X u = \beta\pi_Y$, da P_0 projektiv ist und π_Y surjektiv.

Nun wähle P_1 und Q_1 projektiv mit $f\colon P_1 \to P_0$ surjektiv auf $\mathrm{Kern}(\pi_X)$ und $g\colon Q_1 \to Q_0$ surjektiv auf $\mathrm{Kern}(\pi_Y)$. Dann ist $f\pi_X u = f\beta\pi_Y = 0$, also faktorisiert $f\beta$ über den Kern von π_Y, auf welchen g surjektiv abbildet. Also impliziert die Projektivität von P_1 die Existenz von $\alpha\colon P_1 \to Q_1$ mit $\alpha g = f\beta$.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d, "\beta"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \arrow[r, two heads, "\pi_Y"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dies impliziert die Surjektivität von F. $\square$

Beweis von Proposition 10.3. Es ist $(-)^{\mathrm{t}}\colon A\text{-}\mathtt{proj} \to A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{proj}$ eine Dualität, also ist auch

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj}) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}(A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{proj}) \\ (f\colon P_1 \to P_0) & \longmapsto & (f^{\mathrm{t}}\colon P_0^{\mathrm{t}} \to P_1^{\mathrm{t}}) \\ ((\alpha,\beta)\colon f \to g) & \longmapsto & ((\beta^{\mathrm{t}},\alpha^{\mathrm{t}})\colon g^{\mathrm{t}} \to f^{\mathrm{t}}) \end{array}$$

eine Dualität, welche wir auch mit $(-)^{\mathrm{t}}$ bezeichnen wollen. Wir *behaupten*, dass diese Dualität sich einschränkt zu einer Dualität $(-)^{\mathrm{t}}\colon\ \mathrm{Mor}_1(A\text{-}\mathtt{proj}) \to \mathrm{Mor}_1(A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{proj})$.

Sei also $(\alpha,\beta)\colon f \to g$ ein Morphismus in $\mathrm{Mor}_1(A\text{-}\mathtt{proj})$, d.h. es gibt $h\colon P_0 \to Q_1$ mit $fhg = f\beta$. Dann erhalten wir durch Anwendung von $(-)^{\mathrm{t}}$

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & P_0 \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, "h"'] \\ Q_1 \arrow[r, "g"] & Q_0 \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} Q_0^{\mathrm{t}} \arrow[r, "g^{\mathrm{t}}"] \arrow[d, "\beta^{\mathrm{t}}"'] & Q_1^{\mathrm{t}} \arrow[d, "\alpha^{\mathrm{t}}"] \arrow[dl, "h^{\mathrm{t}}"'] \\ P_0^{\mathrm{t}} \arrow[r, "f^{\mathrm{t}}"] & P_1^{\mathrm{t}}. \end{tikzcd}$$

Damit gilt $g^{\mathrm{t}}h^{\mathrm{t}}f^{\mathrm{t}} = \beta^{\mathrm{t}}f^{\mathrm{t}}$, d.h. $F(\beta^{\mathrm{t}},\alpha^{\mathrm{t}}) = F((\alpha,\beta)^{\mathrm{t}}) = 0$.

Damit erhalten wir so etwas wie kurze exakten Sequenzen von Kategorien (auch wenn $\mathrm{Mor}_1(A\text{-}\mathtt{proj})$ keine Kategorie ist, da es keine Identitäten erhält) und k-linearen Funktoren.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Mor}_1(A\text{-}\mathtt{proj}) \arrow[r] \arrow[d, "(-)^{\mathrm{t}}", "\wr"'] & \mathrm{Mor}(A\text{-}\mathtt{proj}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "(-)^{\mathrm{t}}", "\wr"'] & A\text{-}\underline{\mathtt{mod}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Mor}_1(A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{proj}) \arrow[r] & \mathrm{Mor}(A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{proj}) \arrow[r, "F"] & A^{\mathrm{op}}\text{-}\underline{\mathtt{mod}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Insbesondere sind die ersten beiden vertikalen Funktoren Dualitäten, also muss auch

$$\mathrm{Tr}\colon A\text{-}\underline{\mathtt{mod}} \to A^{\mathrm{op}}\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$$

eine k-lineare Dualität sein. □

Sei $D = \mathrm{Hom}_k(-,k)$ wieder die k-Dualität.

Auf den stabilen Kategorien induziert D Funktoren $D\colon A\text{-}\underline{\mathtt{mod}} \to A\text{-}\overline{\mathtt{mod}}$ und $D\colon A\text{-}\overline{\mathtt{mod}} \to A\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$.

10.5 Definition Die beiden zueinander inversen Kompositionen $\tau := D\,\mathrm{Tr}\colon A\text{-}\underline{\mathtt{mod}} \to A\text{-}\overline{\mathtt{mod}}$ und $\tau^{-1} := \mathrm{Tr}\,D\colon A\text{-}\overline{\mathtt{mod}} \to A\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$ heißen *Auslander-Reiten Verschiebungen.* Der Funktor Tr heißt auch *Auslander-Bridger Transpose.*

Der Funktor $\nu := D(-)^{\mathrm{t}} = D\,\mathrm{Hom}_A(-,A)\colon A\text{-}\mathtt{mod} \to A\text{-}\mathtt{mod}$ heißt *Nakayama-Funktor.*

(Beachte stets die traditionelle Kompositionsreihenfolge bei Funktoren).

Bemerkung *Zur konkreten Berechnung von $\tau M = D\,\mathrm{Tr}\,M$.* 08.05.2017

Sei M unzerlegbar und nicht projektiv. Wähle eine minimale projektive Präsentation

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0.$$

Dann wende $(-)^{\mathrm{t}} = \mathrm{Hom}_A(-,A)$ darauf an und erhalte

$$0 \longrightarrow M^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_0^{\mathrm{t}}} P_0^{\mathrm{t}} \xrightarrow{p_1^{\mathrm{t}}} P_1^{\mathrm{t}} \longrightarrow \mathrm{Tr}\,M \longrightarrow 0.$$

Schließlich wende die k-Dualität D an, beachte $\nu = D(-)^{\mathrm{t}}$

$$0 \longrightarrow D\,\mathrm{Tr}\,M \longrightarrow \nu(P_1) \xrightarrow{\nu(p_1)} \nu(P_0) \xrightarrow{\nu(p_0)} \nu(M) \longrightarrow 0.$$

Insbesondere sehen wir, dass $D\,\mathrm{Tr}\,M$ als Kern von $\nu(p_1)$ bereits eindeutig bestimmt ist.

Beispiel Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra der oberen 2×2-Matrizen. Sei $1_A = e_1 + e_2$ die Standardzerlegung der Eins in primitive orthogonale Idempotente.

Dann sind die projektiven Moduln gegeben durch

$$P_1 = Ae_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = Ae_2 = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $P_1 = S_1$ einfach und $P_2 = I_1$ projektiv-injektiv mit einfachem Teilmodul S_1. Sei $\alpha := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gibt Rechtsmultiplikation mit α die Inklusion $Ae_1 \hookrightarrow Ae_2$. Insgesamt erhalten wir die exakte Sequenz

$$Ae_1 \xhookrightarrow{\cdot\alpha} Ae_2 \twoheadrightarrow Ae_2/Ae_1 = S_2 = \begin{pmatrix} \lozenge \\ k \end{pmatrix} \longrightarrow 0.$$

Beachte wieder, dass $\lozenge := k/k$. Es ist S_2 einfach, also unzerlegbar und injektiv.

Wir wollen $\tau(S_2)$ bestimmen. Es ist $P_2 = Ae_2$ die projektive Decke zu S_2 mit Kern $S_1 = Ae_1$, also ist bereits

$$Ae_1 \xrightarrow{p_1 = \cdot\alpha} Ae_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$$

eine minimale projektive Präsentation von S_2. Unter Verwendung von $\operatorname{Hom}_A(Ae, A) \simeq eA$ erhalten wir nach Anwendung von $(-)^{\mathrm{t}}$

$$e_2A \xrightarrow{p_1^{\mathrm{t}} = \alpha\cdot} e_1A \longrightarrow \operatorname{Cokern}(p_1^{\mathrm{t}}) = \operatorname{Tr} S_2.$$

Insbesondere ist $\operatorname{Tr} M = e_1A/e_2A \simeq (k \;\; \lozenge)$.

Was ist $D(p_1^{\mathrm{t}}) = \nu(p_1)$? Über die Zerlegung

$$e_1A = \underbrace{e_1Ae_1}_{e_1 \in} \oplus \underbrace{e_1Ae_2}_{\alpha \in}$$

sehen wir, dass e_1A die k-Basis $\{e_1, \alpha\}$ hat. Als einfacher Modul hat e_2A die Basis $\{e_2\}$. Damit hat $D(e_1A)$ die Basis $\{e_1^*, \alpha^*\}$ und $D(e_2A)$ die Basis $\{e_2^*\}$.

Für $\varphi\colon e_2A \to k$ ist $a\varphi\colon e_2A \to k$ gegeben durch $e_2b \mapsto (e_2ba)\varphi$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(e_2e_2^*)(e_2) &= e_2^*(e_2e_2) = e_2^*(e_2) = 1 \\
(e_1e_2^*)(e_2) &= e_2^*(e_2e_1) = e_2^*(0) = 0 \\
(\alpha e_2^*)(e_2) &= e_2^*(e_2\alpha) = e_2^*(0) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $D(e_2A) = S_2$ der einfache Modul zum unzerlegbar projektiven Ae_2.

Für $D(e_1A)$ berechnen wir analog $e_1e_1^* = e_1^*$, $\alpha e_1^* = 0$, $e_2e_1^* = 0$, $e_1\alpha^* = 0$, $\alpha\alpha^* = e_1^*$ und $e_2\alpha^* = \alpha^*$. Damit sehen wir, dass $\operatorname{rad}(D(e_1A)) = \operatorname{rad}(A)D(e_1A) = k\alpha D(e_1A) = ke_1^* \simeq S_1$.

Da e_1A projektiv unzerlegbar ist, ist $D(e_1A)$ somit der injektiv unzerlegbare zu S_1, also ist $D(e_1A) = P_2 = Ae_2$. Wenden wir nun die Dualität auf p_1^{t} an, so erhalten wir

$$0 \longrightarrow D\operatorname{Tr} S_2 \longrightarrow D(e_1A) = Ae_2 \xrightarrow{\nu(p_1) = \cdot\alpha} D(e_2A) = S_2.$$

Da $\nu(p_1)$ nicht die Nullabbildung, ist die Abbildung surjektiv, also gilt $D\operatorname{Tr} S_2 \simeq Ae_2/S_2 \simeq S_1$, also gilt $\tau(S_2) = S_1$. Wir erhalten folgenden Kandidaten für eine beinahe zerfallende Sequenz in S_2 endend

$$0 \longrightarrow \tau(S_2) = S_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0,$$

vergleiche auch das Beispiel in Kapitel 8.

Beispiel Sei $Q = \left(1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2\right)$ und betrachte die Kroneckeralgebra kQ.

Um Köcherdarstellungen verwenden zu können, betrachten wir kQ-Rechtsmoduln. Für $\lambda \in k$ erhaltenw wir durch

$$M_{1,\lambda} = \left(k \overset{1}{\underset{\lambda}{\rightrightarrows}} k\right)$$

einen unzerlegbaren kQ-Modul. Desweiteren gilt $M_{1,\lambda} \simeq M_{1,\mu} \Leftrightarrow \lambda = \mu$. Die projektiven kQ-Moduln erhalten wir durch

$$e_1A = \left(k \overset{(1,0)}{\underset{(0,1)}{\rightrightarrows}} k \oplus k\right) \qquad \text{und} \qquad e_2A = \left(0 \rightrightarrows k\right).$$

Eine Basis von e_1A ist durch $\{e_1, \alpha, \beta\}$, eine Basis von e_2A durch $\{e_2\}$ gegeben. Eine Basis von $M_{1,\lambda}$ erhalten wir durch $\{m_1, m_2\}$, wobei $m_1e_1 = m_1$, $m_2e_2 = m_2$, $m_1\alpha = m_2$, $m_1\beta = \lambda m_2$.

Wir suchen eine minimale projektive Präsentation

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M_{1,\lambda} \longrightarrow 0.$$

Es ist $M_{1,\lambda}$ erzeugt von e_1A-Vielfache von m_1, d.h. es muss $P_0 = e_1A$ gelten. Für p_0 muss dann gelten

$$\begin{tikzcd} e_1A \arrow[d, "p_0"'] & k \arrow[r, shift left, "(1,0)"] \arrow[r, shift right, "(0,1)"'] \arrow[d, "1"'] & k \oplus k \arrow[d, "\binom{1}{\lambda}"] \\ M_{1,\lambda} & k \arrow[r, shift left, "1"] \arrow[r, shift right, "\lambda"'] & k. \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist der Kern von p_0 eindimensional und konzentriert bei 2, d.h. e_2A bildet surjektiv auf diesen ab.

$$\begin{tikzcd} e_2A \arrow[d, "p_1"'] & 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & k \arrow[d, "(\lambda,-1)"] \\ e_1A \arrow[d, "p_0"'] & k \arrow[r, shift left, "(1,0)"] \arrow[r, shift right, "(0,1)"'] \arrow[d, "1"'] & k \oplus k \arrow[d, "\binom{1}{\lambda}"] \\ M_{1,\lambda} & k \arrow[r, shift left, "1"] \arrow[r, shift right, "\lambda"'] & k. \end{tikzcd}$$

Damit gilt $p_1(e_2) = \lambda\alpha - \beta = (\lambda\alpha - \beta)e_2$. Somit ist $p_1\colon e_2A \to e_1A$ durch Linksmultiplikation mit $\lambda\alpha - \beta$ gegeben, also ist $p_1^{\mathrm{t}}\colon Ae_1 \to Ae_2$ durch Rechtsmultiplikation mit $\lambda\alpha - \beta$ gegeben. Es folgt, dass $\operatorname{Tr} M_{1,\lambda} \simeq \operatorname{Cokern}(p_1^{\mathrm{t}}) \simeq Ae_2/\langle \lambda\alpha - \beta\rangle_k$.

Nun suchen wir $D(p_1^{\mathrm{t}}) = \nu(p_1)\colon D(Ae_2) \to D(Ae_1)$.

Es hat $D(Ae_2)$ die Basis $(e_2^*, \alpha^*, \beta^*)$. Man rechnet nach, dass $\alpha^*\alpha = e_2^*$, $\alpha^*\beta = 0$, $\beta^*\alpha = 0$ und $\beta^*\beta = e_2^*$ gilt.

Nun beachte, dass p_1^{t} mit der Basis (e_2, α, β) von Ae_2 die Matrix $(0, \lambda, -1)$ besitzt, also besitzt $D(p_1^{\mathrm{t}})$ die transponierte Matrix $(0, \lambda, -1)^{\mathrm{T}}$. Damit ist der Kern von $\nu(p_1)$ aufgespannt von e_2^* und $b^* := \alpha^* + \lambda\beta^*$. Dann gilt jedoch

$$\begin{aligned} b^*\alpha &= \alpha^*\alpha + \lambda\beta^*\alpha = 1 \cdot e_2^* \\ b^*\beta &= \alpha^*\beta + \lambda\beta^*\beta = \lambda \cdot e_2^*. \end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Kern}(\nu(p_1)) = D\operatorname{Tr} M \simeq M_{1,\lambda}$.

Bemerkung *Zur konkreten Berechnung von $\tau^{-1}N = \operatorname{Tr} DN$.*

Sei N unzerlegbar und nicht injektiv. Wähle eine minimale injektive Kopräsentation

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1$$

mit injektiven Moduln I_0 und I_1. Hierbei ist I_0 die injektive Hülle von N und I_1 die injektive Hülle von $\operatorname{Cokern}(i_0)$. Dann wende die k-Dualität $D(-)$ an

$$DI_1 \xrightarrow{Di_1} DI_0 \xrightarrow{Di_0} DN \longrightarrow 0.$$

Beachte, dass DI_1 und DI_0 nun projektiv sind. Schließlich wende $(-)^{\mathrm{t}}$ an

$$(DI_0)^{\mathrm{t}} \xrightarrow{(Di_1)^{\mathrm{t}}} (DI_1)^{\mathrm{t}} \longrightarrow \operatorname{Tr} DN = \tau^{-1}N \longrightarrow 0. \tag{$*$}$$

Es ist $\tau^{-1}N$ eindeutig als Cokern von $(Di_1)^{\mathrm{t}}$ bestimmt.

Für $X, Y \in A\text{-}\mathtt{mod}$ schreiben wir $\underline{\operatorname{Hom}}_A(X,Y) := \operatorname{Hom}_A(X,Y)/\mathcal{P}(X,Y)$ für die Homomorphismen zwischen X und Y in der projektiv stabilen Kategorie $A\text{-}\underline{\mathtt{mod}}$. Analog schreiben wir $\overline{\operatorname{Hom}}_A(X,Y)$ für die Homomorphismen zwischen X und Y in der injektiv stabilen Kategorie $A\text{-}\overline{\mathtt{mod}}$. 10.05.2017

10.6 Theorem (Auslander-Reiten Formeln) *Sei A eine endlichdimensionale Algebra über einem Körper k und seien $X, Y \in A\text{-}\mathtt{mod}$. Dann existieren Isomorphismen*

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^1_A(X,Y) &\simeq D\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}Y, X) \\ \operatorname{Ext}^1_A(X,Y) &\simeq D\,\overline{\operatorname{Hom}}_A(Y, \tau X). \end{aligned}$$

Beide Isomorphismen sind in beiden Variablen funktoriell.

10.7 Lemma *Sei $X \in A\text{-}\mathtt{mod}$. Sei eine Transformation $\varphi^X\colon X^{\mathrm{t}} \otimes_A - \to \operatorname{Hom}_A(X,-)$ definiert für $Y \in A\text{-}\mathtt{mod}$ durch*

$$\begin{aligned} \varphi^X_Y\colon \quad X^{\mathrm{t}} \otimes_A Y &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X,Y) \\ (f \otimes y) &\longmapsto (x \mapsto f(x)y). \end{aligned}$$

Dann ist φ^X eine natürliche Transformation, für X projektiv sogar ein natürlicher Isomorphismus. Für Y projektiv und X beliebig ist φ^X_Y ein Isomorphismus.

Für X und Y beliebig ist $\operatorname{Cokern}(\varphi^X_Y) = \underline{\operatorname{Hom}}_A(X,Y)$, *d.h. es gibt die exakte Sequenz*

$$X^{\mathrm{t}} \otimes_A Y \xrightarrow{\varphi^X_Y} \operatorname{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \underline{\operatorname{Hom}}_A(X,Y) \longrightarrow 0.$$

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass φ^X tatsächlich eine natürliche Transformation ist.

Sei X nun projektiv, Y beliebig. Zeige: φ^X_Y ist ein Isomorphismus. Da die beteiligten Funktoren additiv sind, genügt es, den Fall $X = A$ zu betrachten. Es ist $A^{\mathrm{t}} = \operatorname{Hom}_A(A,A) \simeq A$ durch Rechtsmultiplikation. Somit ist

$$\begin{aligned} \varphi^X_Y\colon \quad A_A \otimes Y &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(A,Y) \\ a \otimes y &\longmapsto (b \mapsto (ba)y) \end{aligned}$$

Durch $\operatorname{Hom}_A(A,Y) \to A \otimes Y,\ f \mapsto 1 \otimes f(1)$ ist eine wohldefinierte Umkehrabbildung gegeben, also ist φ^X_Y ein Isomorphismus.

Ist umgekehrt Y projektiv und X beliebig, so betrachte wieder den Fall $Y = A$. Es wird

$$\begin{aligned} \varphi^X_Y\colon \quad \operatorname{Hom}_A(X,A) \otimes A &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X,A) \\ f \otimes a &\longmapsto (x \mapsto f(x)a) \end{aligned}$$

Wieder ist durch $\mathrm{Hom}_A(X,A) \to \mathrm{Hom}_A(X,A) \otimes A,\ g \mapsto g \otimes 1$ eine wohldefinierte Umkehrabbildung gegeben, also ist φ_Y^X ein Isomorphismus.

Seien nun X und Y beliebig. Sei P projektiv und $f\colon P \twoheadrightarrow Y$ ein Epimorphismus.

Behauptung: Die Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(X,P) \xrightarrow{(X,f)} \mathrm{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y) \longrightarrow 0$$

ist exakt, d.h. es ist $\mathrm{Im}(X,f) = \mathcal{P}(X,Y)$.

Zum Beweis der Behauptung: Für $g\colon X \to P$ faktorisiert $g(X,f) = gf\colon X \to Y$ über P, also ist $\mathrm{Im}(X,f) \subseteq \mathcal{P}(X,Y)$.

Ist umgekehrt $h \in \mathcal{P}(X,Y)$, so gibt es Q projektiv, sowie $h_1\colon X \to Q$ und $h_2\colon Q \to Y$ mit

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_1"'] & & Y \\ & Q. \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd}$$

Da f surjektiv ist, gibt es $j\colon Q \to P$ mit $h_2 = jf$.

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dotted, "\exists j"'] \arrow[d, "h_2"] & \\ P \arrow[r, two heads, "f"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Damit ist $h = h_1h_2 = h_1(jf) = (h_1j)f$, also ist $h = (h_1j)(X,f) \in \mathrm{Im}(X,f)$.

Dies zeigt die *Behauptung*.

Beachte, dass $\varphi_P^X\colon X^{\mathrm{t}} \otimes_A P \to \mathrm{Hom}_A(X,P)$ ein Isomorphismus ist. Mit der Behauptung von oben, der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes und der Natürlichkeit von φ^X erhalten wir das folgende kommutative Diagramm, in dem alle Zeilen exakt sind.

$$\begin{tikzcd} X^{\mathrm{t}} \otimes_A P \arrow[r, "1\otimes f"] \arrow[d, "\varphi_P^X", "\wr"'] & X^{\mathrm{t}} \otimes_A Y \arrow[rr] \arrow[d, "\varphi_Y^X"] & & 0 \\ \mathrm{Hom}_A(X,P) \arrow[r, "(X,f)"] & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Da φ_P^X ein Isomorphismus ist, gilt $\mathrm{Im}(\varphi_P^X(X,f)) = \mathrm{Im}(X,f)$. Da $(1 \otimes f)$ surjektiv ist, gilt $\mathrm{Im}((1\otimes f)\varphi_Y^X) = \mathrm{Im}(\varphi_Y^X)$. Da nun $\varphi_P^X(X,f) = (1\otimes f)\varphi_Y^X$ gilt, ist somit $\mathrm{Im}(X,f) = \mathrm{Im}(\varphi_Y^X)$.

Also ist $\mathrm{Cokern}(\varphi_Y^X) = \mathrm{Cokern}(X,f) = \underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$. □

Beweis von Theorem 10.6. Wir zeigen die erste Formel.

Es genügt den Fall X, Y unzerlegbar, X nicht projektiv und Y nicht injektiv zu betrachten.

Es ist $Y = \tau(\tau^{-1}Y) = \tau Z$ mit $Z := \tau^{-1}Y \neq 0$, da Y nicht injektiv. Wähle nun eine minimale projektive Präsentation von Z

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} Z \longrightarrow 0$$

und wende den Nakayama-Funktor ν auf diese an. Damit erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Y = \tau Z \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{Dp_1^{\mathrm{t}}} \nu P_0 \xrightarrow{Dp_0^{\mathrm{t}}} \nu Z.$$

Dies ist dann (in den ersten Gliedern) eine injektive Kopräsentation von Y. Wende nun $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ auf diese an und erhalte mit den entsprechenden Abbildungen $\bar{p}_0$ und $\bar{p}_1$ die im Allgemeinen nicht exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,\nu P_1) \xrightarrow{\bar{p}_1} \mathrm{Hom}_A(X,\nu P_0) \xrightarrow{\bar{p}_0} \mathrm{Hom}_A(X,\nu Z). \quad (*)$$

Behauptung: Es gilt $\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) = \mathrm{Kern}(\bar{p}_0)/\,\mathrm{Im}(\bar{p}_1)$.

Begründung der Behauptung: Für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

mit P projektiv erhalten wir durch Anwendung von $\mathrm{Hom}_A(-,Y)$ die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(K,Y) \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& \mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(P,Y) = 0. &
\end{tikzcd}$$

Analog erhalten wir aus einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

mit I injektiv durch Anwendung von $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,I) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,C) \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] \\
& \mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(X,I) = 0. &
\end{tikzcd}$$

In beiden Fällen können wir $\mathrm{Ext}^1_A(X,Y)$ aus Hom-Moduln berechnen.

Sei nun eine exakte Sequenz mit 4 Termen und P, Q projektiv gegeben.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & Q \arrow[rr] \arrow[dr] & & P \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \\
& & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Dann erhalten wir mit K als dem Kern von $P \to X$, bzw. als Cokern von $K' \to Q$ zwei kurze exakte Sequenzen mit Q bzw. mit P als Mittelterm.

Wende nun $\mathrm{Hom}_A(-,Y)$ auf obiges Diagramm an.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P,Y) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] & & \mathrm{Hom}_A(Q,Y) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Hom}_A(K',Y) \\
& 0 \arrow[r] & & \mathrm{Hom}_A(K,Y) \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Somit gilt $\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) = \mathrm{Hom}_A(K,Y)/\,\mathrm{Im}(\gamma)$. Aus der Linksexaktheit des Hom-Funktors folgt $\mathrm{Hom}_A(K,Y) = \mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Kern}(\beta)$. Weiterhin ist mit $\mathrm{Kern}(\gamma) = \mathrm{Kern}(\alpha)$ also auch $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\alpha)$.

Insgesamt ist also $\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) = \mathrm{Kern}(\beta)/\,\mathrm{Im}(\alpha)$, was die obige *Behauptung* begründet.

Sei wieder

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} Z \longrightarrow 0$$

die minimale projektive Präsentation von Z von oben. Diesmal wende den Funktor $D\operatorname{Hom}_A(-,X)$ an.

$$D\operatorname{Hom}_A(P_1,X) \xrightarrow{\tilde{p}_1} D\operatorname{Hom}_A(P_0,X) \xrightarrow{\tilde{p}_0} D\operatorname{Hom}_A(Z,X) \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

Nun wollen wir mit Lemma 10.7 die Terme in $(*)$ mit denen in $(**)$ vergleichen. Nach besagten Lemma gibt es die Abbildungen

$$\begin{aligned}
\varphi_X^{P_1}\colon \quad P_1^{\mathrm{t}} \otimes_A X &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(P_1,X)\\
\varphi_X^{P_0}\colon \quad P_0^{\mathrm{t}} \otimes_A X &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(P_0,X)\\
\varphi_X^{Z}\colon \quad Z^{\mathrm{t}} \otimes_A X &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Z,X).
\end{aligned}$$

Durch Dualisieren gibt dies die Abbildungen

$$\begin{aligned}
D\operatorname{Hom}_A(P_1,X) &\longrightarrow D(P_1^{\mathrm{t}} \otimes_A X)\\
D\operatorname{Hom}_A(P_0,X) &\longrightarrow D(P_0^{\mathrm{t}} \otimes_A X)\\
D\operatorname{Hom}_A(Z,X) &\longrightarrow D(Z^{\mathrm{t}} \otimes_A X),
\end{aligned}$$

wobei die oberen beiden sogar (natürliche) Isomorphismen sind. Mit der Adjunktionsformel (vgl. Theorem 6.16) erhalten wir den natürlichen Isomorphismus

$$D(P_1^{\mathrm{t}} \otimes_A X) = \operatorname{Hom}_k(P_1^{\mathrm{t}} \otimes_A X, k) \simeq \operatorname{Hom}_A(X, \operatorname{Hom}_k(P_1^{\mathrm{t}}, k)) = \operatorname{Hom}_A(X, DP_1^{\mathrm{t}}),$$

analog auch $D(P_0^{\mathrm{t}} \otimes_A X) \simeq \operatorname{Hom}_A(X, DP_0^{\mathrm{t}})$ und $D(Z^{\mathrm{t}} \otimes_A X) \simeq \operatorname{Hom}_A(X, DZ^{\mathrm{t}})$.

Damit erhalten wir aus einem Teil von $(*)$ und $(**)$ mit entsprechenden Isomorphismen ψ_1 und ψ_0, sowie der entsprechenden Abbildung w aus der Natürlichkeit aller beteiligten vertikalen Abbildungen das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
D\operatorname{Hom}_A(P_1,X) \arrow[r, "\tilde{p}_1"] \arrow[d, "\psi_1", "\wr"'] & D\operatorname{Hom}_A(P_0,X) \arrow[r, "\tilde{p}_0"] \arrow[d, "\psi_0", "\wr"'] & D\operatorname{Hom}_A(Z,X) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "w"] & 0\\
\operatorname{Hom}_A(X,\nu P_1) \arrow[r, "\bar{p}_1"] & \operatorname{Hom}_A(X,\nu P_0) \arrow[r, "\bar{p}_0"] & \operatorname{Hom}_A(X,\nu Z).
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\operatorname{Ext}_A^1(X,Y) = \operatorname{Kern}(\bar{p}_0)/\operatorname{Im}(\bar{p}_1)$. Dies wollen wir mit $D\underline{\operatorname{Hom}}_A(Z,X)$ identifizieren (beachte $Z = \tau^{-1}Y$).

Es ist $\psi_0\bar{p}_0 = \tilde{p}_0 w$, also $\operatorname{Kern}(\psi_0\bar{p}_0) = \operatorname{Kern}(\tilde{p}_0 w)$. Da ψ_0 ein Isomorphismus ist gilt daher $\operatorname{Kern}(\bar{p}_0) = \operatorname{Kern}(\psi_0^{-1}\tilde{p}_0 w)$. Somit ist die Abbildung $\gamma := \psi_0^{-1}\tilde{p}_0\colon \operatorname{Kern}(\bar{p}_0) \to \operatorname{Kern}(w)$ wohldefiniert. Da ψ_0^{-1} als Isomorphismus und $\tilde{p}_0$ beide surjektiv sind, zeigt eine Diagrammjagd, dass auch γ surjektiv ist. 15.05.2017

Behauptung: $\operatorname{Kern}(\gamma) = \operatorname{Im}(\bar{p}_1)$.

Denn: Sei $f \in \operatorname{Im}(\bar{p}_1)$, d.h. $f = g\bar{p}_1$ für ein g. Dann ist $f\gamma = g\bar{p}_1\gamma = g\bar{p}_1\psi_0^{-1}\tilde{p}_0 = g\psi_1^{-1}\tilde{p}_1\tilde{p}_0 = 0$, also ist $f \in \operatorname{Kern}(\gamma)$.

Umgekehrt sei nun $f \in \operatorname{Kern}(\gamma)$. Dann ist $f\gamma = f\psi_0^{-1}\tilde{p}_0 = 0$, also $f\psi_0^{-1} \in \operatorname{Kern}(\tilde{p}_0) = \operatorname{Im}(\tilde{p}_1)$. Somit gibt es ein g mit $f\psi_0^{-1} = g\tilde{p}_1$, also ist $f = g\tilde{p}_1\psi_0 = g\psi_1\bar{p}_1$, also $f \in \operatorname{Im}(\bar{p}_1)$. Dies zeigt die *Behauptung*.

Insgesamt gilt nun

$$\operatorname{Ext}_A^1(X,Y) \simeq \operatorname{Kern}(\bar{p}_0)/\operatorname{Im}(\bar{p}_1) = \operatorname{Kern}(\bar{p}_0)/\operatorname{Kern}(\gamma) \simeq \operatorname{Im}(\gamma) = \operatorname{Kern}(w).$$

Es ist w allerdings definiert als Komposition von $D\varphi_X^Z$ mit gewissen Isomorphismen, d.h. es ist $\operatorname{Kern}(w) \simeq \operatorname{Kern}(D\varphi_X^Z) \simeq D\operatorname{Cokern}(\varphi_X^Z)$, also schließlich mit Lemma 10.7

$$\operatorname{Ext}_A^1(X,Y) \simeq D\operatorname{Cokern}(\varphi_X^Z) \simeq D\underline{\operatorname{Hom}}_A(Z,X) = D\underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}Y,X). \qquad \square$$

11 Auslander-Reiten Sequenzen

11.1 Theorem (Hauptsatz der Auslander-Reiten Theorie) *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra, sei $X \in A\text{-}\mathtt{mod}$ unzerlegbar und nicht projektiv, sei $Y \in A\text{-}\mathtt{mod}$ unzerlegbar und nicht injektiv. Dann existieren eine beinahe zerfallende Sequenz*

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

und eine beinahe zerfallende Sequenz

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow F \longrightarrow \tau^{-1} Y \longrightarrow 0.$$

Beweis. Wir zeigen die Existenz der oberen Sequenz in $\operatorname{Ext}^1_A(X, \tau X)$ für X unzerlegbar und nicht projektiv. Die Auslander-Reiten Formel (Theorem 10.6) liefert den natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{Ext}^1_A(X, \tau X) \simeq D\, \underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}\tau X, X) = D\, \underline{\operatorname{Hom}}_A(X, X).$$

Idee: Wähle exakte Sequenz, die $D(\mathrm{id}_X)$ auf der rechten Seite entspricht.

Es ist X unzerlegbar, also ist $\operatorname{End}_A(X)$ ein lokaler Ring mit eindeutig maximalem Ideal $\operatorname{rad}(\operatorname{End}_A(X))$. Da X nicht projektiv, ist $\mathrm{id}_X \notin \mathcal{P}(X, X)$, denn sonst wäre X ein direkter Summand eines projektiven Moduls, also selbst projektiv. Damit ist jedoch $\mathcal{P}(X, X) \subseteq \operatorname{rad}(\operatorname{End}_A(X))$.

Es ist $S(X) := \operatorname{End}_A(X) / \operatorname{rad}(\operatorname{End}_A(X))$ der eindeutige einfache $\operatorname{End}_A(X)$-Modul. Dann gibt es den Epimorphismus

$$\underline{\operatorname{Hom}}_A(X, X) = \operatorname{End}_A(X)/\mathcal{P}(X, X) \twoheadrightarrow \operatorname{End}_A(X)/\operatorname{rad}(\operatorname{End}_A(X)) \simeq S(X).$$

Nach Dualisieren erhalten wir den Monomorphismus

$$DS(X) \hookrightarrow D\, \underline{\operatorname{Hom}}_A(X, X) \simeq \operatorname{Ext}^1_A(X, \tau X).$$

Weiterhin ist $S(X)$ der eindeutige einfache Teilmodul von $D\, \underline{\operatorname{Hom}}_A(X, X)$, also der sogenannte *Sockel* von $D\, \underline{\operatorname{Hom}}_A(X, X)$.

Nun wähle $0 \neq \xi \in DS(X)$, zum Beispiel $\xi = D(1_X)$. Dann definiert ξ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tau X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0.$$

Wir zeigen: ξ ist beinahe zerfallend. Da $\xi \neq 0$, ist die Sequenz nicht zerfallend. Nach Proposition 10.2 ist τX unzerlegbar, da X unzerlegbar ist.

Nach Theorem 9.5 (b) genügt es also zu zeigen, dass g rechts beinahe zerfallend ist.

Es ist g kein split Epi, da $\xi \neq 0$, d.h. da die Sequenz nicht zerfällt. Sei nun $v\colon V \to X$ auch kein split Epi. Zeige: v faktorisiert über g. O.B.d.A. ist V unzerlegbar.

Sei E' der Pullback von g und v. Dann gibt es das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen, wobei die untere Zeile $\xi' \in \operatorname{Ext}^1_A(V, \tau X)$ repräsentiere.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau X \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau X \arrow[r, "f'"] \arrow[u, equal] & E' \arrow[r, "g'"] \arrow[u, "u"] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & V \arrow[r] \arrow[u, "v"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Mit der Funktorialität von Ext erkennen wir, dass $\xi' = \xi\,\mathrm{Ext}^1_A(v, \tau X)$ gilt.

Mit der Natürlichkeit des Isomorphismus aus der Auslander-Reiten Formel entspricht $\mathrm{Ext}^1_A(v, \tau X)$ die Abbildung

$$v := D\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, v)\colon D\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, X) \to D\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, V),$$

bzw. nach Dualisieren

$$v^* := \underline{\mathrm{Hom}}_A(X, v)\colon\ \underline{\mathrm{Hom}}_A(X, V) \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(X, X).$$

Nun ist v^* kein Epimorphismus, denn dann wäre 1_X im Bild, also $X \mid V$ und damit v ein split Epi. Also ist v kein Monomorphismus, d.h. es ist $\mathrm{Kern}(v) \neq 0$. Doch dann ist $S(X) \subseteq \mathrm{Kern}(v)$, da $DS(X)$ der eindeutig minimale Teilmodul von $D\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, X)$ ist.

Allerdings ist nach Wahl $\xi \in DS(X)$, also gilt $\xi' = 0$. Somit ist die Sequenz ξ' zerfallend, d.h. es gibt $h\colon V \to E'$ mit $1_V = hg'$. Dann gilt $v = 1_V v = hg'v = hug$ und damit faktorisiert v über g, d.h. die Sequenz ξ ist rechts beinahe zerfallend. □

Bemerkung Die Konstruktion von ξ im obigen Beweis erklärt den Namen *beinahe zerfallend*: Wir wählen $0 \neq \xi$ aus dem Sockel von $\mathrm{Ext}^1_A(X, \tau X)$, d.h. dem eindeutigen minimalen Teilmodul.

Ist $\mathrm{End}_A(X) = k$, so ist jede nicht zerfallend Sequenz in $\mathrm{Ext}^1_A(X, \tau X)$ beinahe zerfallend. Allgemeiner gilt dies sogar schon, falls $\underline{\mathrm{Hom}}_A(X, X)$ ein Schiefkörper ist.

Sei nun $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$. Seien $S_1, \ldots, S_n$ die einfachen A-Moduln. Sei $[M : S_j]$ die Vielfachheit von S_j in der Jordan-Hölder Reihe von M. Definiere den *Dimensionsvektor* von M durch

$$\underline{\dim}\, M = ([M : S_1], \ldots, [M : S_n]).$$

Falls $A/\operatorname{rad}(A) = k \oplus \ldots \oplus k$, d.h. falls A eine elementare k-Algebra ist, so ist für eine Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ in primitive paarweise orthogonale Idempotente stets $Ae_j/\operatorname{rad}(Ae_j) \simeq S_j$ eindimensional über k. Damit ist $e_j M = \mathrm{Hom}_A(Ae_j, M)$ also auch $\dim_k(e_j M) = [M : S_j]$.

In diesem Fall summieren sich also die Einträge des Dimensionsvektor zur Dimension des Moduls über dem Grundkörper k.

Wir *vereinbaren*, dass $\underline{\dim}\, M$ stets ein Spaltenvektor ist.

Wir wollen $\underline{\dim}\, \tau M$ aus $\underline{\dim}\, M$ bestimmen. Nach Definition müssen wir dazu eine minimale projektive Präsentation

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M$$

von M wählen und darauf den Nakayama-Funktor anwenden. Aus der dann entstandenen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \longrightarrow \nu P_0 \longrightarrow \nu M \longrightarrow 0$$

erhalten wir, da $e_j \cdot - = \mathrm{Hom}_A(Ae_j, -)$ exakt ist, zumindest die Formel

$$\underline{\dim}\, \tau M = \underline{\dim}\, \nu P_1 - \underline{\dim}\, \nu P_0 + \underline{\dim}\, \nu M.$$

Für eine endlichdimensionale k-Algebra A ist die *Grothendieckgruppe* definiert durch

$$\mathrm{K}_0(A\text{-}\mathtt{mod}) := \frac{\text{Freie abelsche Gruppe auf Isomorphieklassen } [M] \text{ in } A\text{-}\mathtt{mod}}{\text{Für jede kurze exakte Sequenz } 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \text{ gilt die Relation } [X] + [Z] = [Y].}$$

Nach Jordan-Hölder erhalten wir den Isomorphismus $\mathrm{K}_0(A\text{-}\mathtt{mod}) \simeq \mathbf{Z}^n$ mit Basis gegeben durch die Isomorphieklassen der einfachen A-Moduln $[S_1], \ldots, [S_n]$. Damit repräsentiert der Dimensionsvektor $\underline{\dim}\, M \in \mathrm{K}_0(A\text{-}\mathtt{mod})$ genau die Isomorphieklasse von M in $\mathrm{K}_0(A\text{-}\mathtt{mod})$.

11.2 Definition Die Matrix $C_A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ mit den Dimensionsvektoren $\underline{\dim}\, Ae_1, \dots, \underline{\dim}\, Ae_n$ 17.05.2017
der projektiv unzerlegbaren Moduln $Ae_1, \dots, Ae_n$ als Spaltenvektoren heißt *Cartanmatrix* der Algebra A.

Beispiele

- Sei A die Algebra der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen über k. Dann ist jeder einfache Modul eindimensional und taucht in der Kompositionsreihe jedes projektiv unzerlegbaren Moduls genau einmal auf, d.h. es gilt

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Sei A die Kroneckeralgebra. Dann ist $A \simeq \left(\begin{smallmatrix} k & k\oplus k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ und es gilt

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Sei $A = k[x]/(x^n)$. Dann gibt es genau einen einfachen A-Modul und es ist $C_A = (n)$.
- Sei A elementar, d.h. es ist $A/\operatorname{rad}(A) \simeq k \oplus \ldots \oplus k$. Dann ist $C_A = (c_{i,j})_{i,j}$ mit

$$c_{i,j} = \dim_k e_i A e_j = [Ae_j : S(i)].$$

  Also ist die j-Zeile von C_A gegeben durch $(\dim_k e_j A e_1, \dots, \dim_k e_j A e_n)$. Es ist $D(e_j A)$ der j-unzerlegbare injektive A-Linksmodul und mit

$$S_A(j) = Ae_j/\operatorname{rad}(Ae_j) \qquad S_{A^{\mathrm{op}}}(j) = e_j A/\operatorname{rad}(e_j A)$$

  gilt $D(S_{A^{\mathrm{op}}}) = S_A(j)$.

  Insbesondere ist die j-te Zeile von C_A genau $(\underline{\dim}\, I(j))^{\mathrm{T}}$, wobei $I(j)$ der unzerlegbar injektive zum einfachen Modul $S(j)$ ist.

  Dies gilt auch für allgemeine endlichdimensionale Algebren.

Beispiel Wir untersuchen die Cartanmatrix auf Invertierbarkeit. Es ist stets $C_A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$, wobei n die Anzahl der einfachen A-Moduln ist (bis auf Isomorphie).

- Für $A = k[x]/(x^m)$ ist $C_A = (m)$, was für $m > 1$ nicht über $\mathbf{Z}$ invertierbar ist.
- Für die Algebra gegeben durch Köcher und Relationen

$$A = k\Big(\bullet \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\leftrightarrows}} \bullet\Big)\Big/\Big\langle \alpha\beta, \beta\alpha \Big\rangle,$$

  d.h. die Nakayama-Algebra der Dimension 4 mit 2 einfachen Moduln und $\operatorname{rad}(A)^2 = 0$ gilt

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  was über keinem Ring invertierbar ist.

Wir suchen ein Kriterium an A, nach dem die Cartanmatrix C_A ganzzahlig invertierbar ist, also es ein Inverses in $\mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ gibt.

11.3 Definition Sei $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$.

Die *projektive Dimension* $\operatorname{pdim}(M)$ (oder $\operatorname{projdim}(M)$) von M ist definiert durch

$$\operatorname{pdim}(M) := \inf \{n \in \mathbf{N} : \text{es gibt eine projektive Auflösung } 0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0\} .$$

Damit ist $\operatorname{pdim}(M) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ mit $\operatorname{pdim}(M) = \infty$, falls es keine endliche projektive Auflösung von M gibt.

Die *injektive Dimension* $\operatorname{idim}(M)$ (oder $\operatorname{injdim}(M)$) von M ist definiert durch

$$\operatorname{idim}(M) := \inf \{n \in \mathbf{N} : \text{es gibt eine injektive Auflösung } 0 \to M \to I_0 \to \ldots \to P_n \to 0\} .$$

Wieder ist $\operatorname{idim}(M) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ mit $\operatorname{idim}(M) = \infty$, falls es keine endliche injektive Auflösung von M gibt.

Die *globale Dimension* $\operatorname{gldim}(A)$ von A ist definiert durch

$$\operatorname{gldim}(A) := \sup \{\operatorname{pdim}(M) : M \in A\text{-}\mathtt{mod}\} .$$

Auch hier ist $\operatorname{gldim}(A) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Bemerkung Es gilt $\operatorname{pdim}(M) = 0$ genau dann, wenn M projektiv ist, analog $\operatorname{idim}(M) = 0$ genau dann, wenn M injektiv ist.

Es ist $\operatorname{gldim}(A) = 0$ genau dann, wenn alle A-Moduln projektiv, d.h. wenn A halbeinfach ist.

Man kann zeigen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{gldim}(A) &= \sup \{j \in \mathbf{N} : \text{es gibt } X, Y \in A\text{-}\mathtt{mod} \text{ mit } \operatorname{Ext}^j_A(X, Y) \neq 0\} \\
&= \operatorname{gldim}(A^{\mathrm{op}}) \\
&= \sup \{\operatorname{idim}(M) : M \in A\text{-}\mathtt{mod}\} \\
&= \sup \{\operatorname{pdim}(S) : S \text{ einfach}\} \\
&= \sup \{\operatorname{idim}(S) : S \text{ einfach}\} .
\end{aligned}$$

Alle diese Identitäten gelten im Allgemeinen nur für endlichdimensionale k-Algebren.

11.4 Proposition *Sei die globale Dimension* $\operatorname{gldim}(A) < \infty$ *endlich. Dann gilt* $\det(C_A) = \pm 1$ *und* C_A *ist ganzzahlig invertierbar.*

Beweis. Da $\operatorname{gldim}(A) < \infty$ ist $\operatorname{pdim}(S(j)) < \infty$ für alle einfachen Moduln $S(j)$. Für j beliebig gibt es damit eine exakte Sequenz

$$0 \to P_\ell \to \ldots \to P_0 \to S(j) \to 0$$

mit $P_\ell, \ldots, P_0$ projektiv. Damit gilt für den Dimensionsvektor von $S(j)$

$$\underline{\dim}\, S(j) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \,\underline{\dim}\, P_i.$$

Allerdings ist $\underline{\dim}\, P_i$ eine $\mathbf{Z}$-Linearkombination der Dimensionsvektoren $\underline{\dim}\, P(k)$ der projektiv unzerlegbaren A-Moduln. Weiterhin ist $\underline{\dim}\, S(j)$ der Standardbasisvektor mit 1 an der Stelle j und 0 sonst.

Dies gilt für alle j, also gibt es eine Matrix $X \in \mathrm{M}_n(\mathbf{Z})$ mit Einträgen in $\mathbf{Z}$, sodass

$$\left(\underline{\dim}\, S(1), \ldots, \underline{\dim}\, S(n)\right) = E_n = X C_A,$$

gilt, wobei E_n die Einheitsmatrix der Größe n bezeichnet. Damit ist C_A also invertierbar über $\mathbf{Z}$ und es gilt $\det(C_A) = \pm 1$. □

11.5 Definition Sei $\operatorname{gldim}(A) < \infty$. Die Matrix

$$\Phi_A := -C_A^{\mathrm{T}} C_A^{-1}$$

heißt *Coxetermatrix* von A. Die bezüglich der Standardbasis dadurch definierte lineare Abbildung $\Phi_A \colon \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^n$ heißt *Coxetertransformation* von A.

Beispiel

- Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen. Dann ist

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} k & k\oplus k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Kroneckeralgebra. Dann ist

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Sei $\operatorname{gldim}(A) < \infty$.
Es gilt $\underline{\dim}\, P(j) = C_A \,\underline{\dim}\, S(j)$, also $\underline{\dim}\, S(j) = C_A^{-1} \,\underline{\dim}\, P(j)$. Andererseits ist durch Betrachtung der Zeilen der Cartanmatrix $(\underline{\dim}\, I(j))^{\mathrm{T}} = (\underline{\dim}\, S(j))^{\mathrm{T}} C_A$, also $\underline{\dim}\, I(j) = C_A^{\mathrm{T}} \,\underline{\dim}\, S(j)$. Zusammen ist also

$$\underline{\dim}\, I(j) = C_A^{\mathrm{T}} \,\underline{\dim}\, S(j) = C_A^T C_A^{-1} \,\underline{\dim}\, P(j) = -\Phi_A \,\underline{\dim}\, P(j).$$

11.6 Proposition *Sei* $\operatorname{gldim}(A) < \infty$ *und* $\Phi_A \colon \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}^n$ *die Coxetertransformation von* A.

(a) *Sei* X *unzerlegbar und nicht projektiv mit minimaler projektiver Präsentation*

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0.$$

Dann gilt

$$\underline{\dim}\, \tau X = \Phi_A(\underline{\dim}\, X) - \Phi_A(\underline{\dim}\, \operatorname{Kern}(p_1)) + \underline{\dim}\, \nu X.$$

(b) *Sei* Y *unzerlegbar und nicht injektiv mit minimaler injektiver Kopräsentation*

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i_0} I_0 \xrightarrow{i_1} I_1.$$

Dann gilt

$$\underline{\dim}\, \tau^{-1} Y = \Phi_A^{-1}(\underline{\dim}\, Y) - \Phi_A^{-1}(\underline{\dim}\, \operatorname{Cokern}(i_1)) + \underline{\dim} (DY)^{\mathrm{t}}.$$

Beweis. Wir zeigen (a).
Nach Voraussetzung gibt es die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern}(p_1) \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} X \longrightarrow 0.$$

Damit ist $\underline{\dim}\, X = \underline{\dim}\, P_0 - \underline{\dim}\, P_1 + \underline{\dim}\, \operatorname{Kern}(p_1)$, also

$$\Phi_A(\underline{\dim}\, X) - \Phi_A(\underline{\dim}\, \operatorname{Kern}(p_1)) = \Phi_A(\underline{\dim}\, P_0) - \Phi_A(\underline{\dim}\, P_1).$$

Nun gilt $\Phi_A(\underline{\dim}\, P(j)) = -\underline{\dim}\, I(j)$ für die projektiv unzerlegbaren, außerdem ist $\nu P(j) = I(j)$, daher folgt $\Phi_A(\underline{\dim}\, P_0) - \Phi_A(\underline{\dim}\, P_1) = \underline{\dim}\, \nu P_1 - \underline{\dim}\, \nu P_0$. Insgesamt ist also

$$\Phi_A(\underline{\dim}\, X) - \Phi_A(\underline{\dim}\, \mathrm{Kern}(p_1)) = \underline{\dim}\, \nu P_1 - \underline{\dim}\, \nu P_0.$$

Nun gibt es allerdings auch die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow \nu P_1 \longrightarrow \nu P_0 \longrightarrow \nu X \longrightarrow 0,$$

d.h. es gilt $\underline{\dim}\, \tau X = \underline{\dim}\, \nu P_1 - \underline{\dim}\, \nu P_0 + \underline{\dim}\, \nu X$. Damit folgt

$$\underline{\dim}\, \tau X = \underline{\dim}\, \nu P_1 - \underline{\dim}\, \nu P_0 + \underline{\dim}\, \nu X = \Phi_A(\underline{\dim}\, X) - \Phi_A(\underline{\dim}\, \mathrm{Kern}(p_1)) + \underline{\dim}\, \nu X$$

und die Behauptung folgt. □

Die Formel in Proposition 11.6 (a) wird einfacher, wenn $\mathrm{Kern}(p_1) = 0$, d.h. $\mathrm{pdim}\, X \leq 1$ und $\nu X = 0$, d.h. $\mathrm{Hom}_A(X, A) = 0$. Wir suchen nun eine Klasse von Algebren, die diese beiden Bedingungen erfüllt: Dann gilt nämlich $\underline{\dim}\, \tau X = \Phi_A(\underline{\dim}\, X)$.

11.7 Definition Eine endlichdimensionale Algebra A heißt *erblich*, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.

(a) Jeder Teilmodul eines projektiven Linksmoduls ist wieder projektiv.

(a′) Jeder Teilmodul eines projektiven Rechtsmoduls ist wieder projektiv.

(b) Jeder Quotient eines injektiven Linksmoduls ist wieder injektiv.

(b′) Jeder Quotient eines injektiven Rechtsmoduls ist wieder injektiv.

(c) $\mathrm{gldim}(A) \leq 1$.

Beispiele (für erbliche Algebren)

- Halbeinfache Algebren sind erblich: Nach dem Satz von Wedderburn und Artin (Theorem 3.21) ist linkshalbeinfach äquivalent zu rechtshalbeinfach. D.h. alle Linksmoduln sind projektiv genau dann, wenn alle Rechtsmoduln projektiv sind, d.h. genau dann, wenn $\mathrm{gldim}(A) = 0$ gilt.
- Sei Q ein Köcher mit $A = kQ$ und $\dim_k A < \infty$. Dann ist $\mathrm{gldim}(A) \leq 1$, d.h. A ist erblich.

  Mit Hilfe der langen Homologiesequenz genügt es, $\mathrm{pdim}(S) \leq 1$ für alle einfachen Moduln S zu zeigen (siehe unten). Sei also $S = S(j)$ der einfache Modul an $j \in Q_0$. Sei $P(j) = e_j A$ der zugehörige projektiv unzerlegbare Rechtsmodul, d.h. es ist $S(j) = e_j A / \mathrm{rad}(e_j A)$. Dann hat $e_j A$ als Basis alle Wege, die in j beginnen. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in Q_1$ die Pfeile, die in j starten. Gilt $m = 0$, so ist $P(j) = S(j)$ und damit $S(j)$ bereits projektiv, d.h. $\mathrm{pdim}(S) = 0$. Seien $j_1, \ldots, j_m \in Q_0$ die Endpunkte der Pfeile α_i, ggf. mit Vielfachheiten.

  Dann hat $e_{j_i} A$ als Basis alle Wege, die in j_i starten und die Abbildung $\alpha_i \cdot - \colon e_{j_i} A \to e_j A$ ist injektiv und ihr Bild hat als Basis alle Wege, die in j starten und mit α_i beginnen. Allerdings hat auch $\mathrm{rad}(e_j A)$ als Basis alle Wege der Länge ≥ 1, die in j starten, also ist $\mathrm{rad}(e_j A) \simeq \bigoplus_{i=1}^m e_{j_i} A$. Insbesondere ist $\mathrm{rad}(e_j A)$ projektiv. Damit hat $S(j)$ die projektive Auflösung

  $$0 \to \mathrm{rad}(e_j A) \to e_j A \to S(j) \to 0,$$

  d.h. es ist $\mathrm{pdim}(S(j)) \leq 1$.

Bemerkung Um zu entscheiden, ob eine Algebra erblich ist, genügt es, die einfachen Moduln zu betrachten. 22.05.2017

Sei $\mathrm{gldim}(A) \leq 1$, d.h. es ist $\mathrm{Ext}^j_A(S, T) = 0$ für $j > 1$ und S, T einfach. Sei M beliebig (endlichdimensional) mit Kompositionslänge 2. Sei L einfach.

Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

mit S, T einfach. Wir wenden $\operatorname{Hom}_A(-, L)$ auf die obige Sequenz an. Dann gibt es die lang exakte Cohomologiesequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M,L) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(S,L) \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(M,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(S,L) \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(M,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2_A(S,L) \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}^3_A(T,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^3_A(M,L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^3_A(S,L) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Dann ist $\operatorname{Ext}^j_A(T,L) = \operatorname{Ext}^j_A(S,L) = 0$ für $j > 1$, also ist mit der Exaktheit auch $\operatorname{Ext}^j_A(M,L) = 0$ für alle $j > 1$. Die Aussage folgt nun durch Induktion über die Kompositionslänge von M, dann ebenso für das zweite Argument in Ext.

Beweis der Äquivalenzen in Definition 11.7.

Es ist $\operatorname{gldim}(A) \leq 1$ genau dann, wenn $\operatorname{Ext}^j_A(X,Y) = 0$ für $j > 1$, was genau dann gilt, wenn $\operatorname{Ext}^j_{A^{\mathrm{op}}}(DY, DX) = 0$ für $j > 1$ (siehe Übungen). Damit ist die Bedingung (c) links-rechts symmetrisch.

Es genügt also, (a) $\Leftrightarrow$ (c) zu zeigen. Gilt (a), so sind alle Teilmoduln von projektiven Moduln wieder projektiv. Sei $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$. Zeige: $\operatorname{pdim}(M) \leq 1$. Dazu konstruieren wir eine projektive Auflösung von M der Länge 1. Sei P_0 endlichdimensional projektiv mit einem Epi $p_0 \colon P_0 \twoheadrightarrow M$. Dann ist $P_1 := \operatorname{Kern}(p_0) \subseteq P_0$ auch projektiv. Sei $p_1 \colon P_1 \hookrightarrow P_0$ die Inklusion. Dann ist

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

exakt, also eine projektive Auflösung der Länge 1 von M. Somit ist $\operatorname{pdim}(M) \leq 1$.

Umgekehrt gelte (c), d.h. $\operatorname{pdim}(M) \leq 1$ für alle Moduln M. Sei $Q \subseteq P$ projektiv. Zeige: Q projektiv. Sei $M = P/Q$. Dann gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\iota} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

mit Inklusion ι und Quotientenabbildung π. Andererseits besitzt M nach Voraussetzung eine minimale projektive Auflösung der Länge 1

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0.$$

Dann ist P_0 die projektive Decke von M, also ist $P_0 \mid P$, da auch P surjektiv auf M abbildet. Sei $P = P_0 \oplus Q_0$. Dann ist $Q_0 \subseteq \operatorname{Kern}(\pi) = \operatorname{Im}(\iota)$. Also bildet ι surjektiv auf Q_0 ab, d.h. es ist $Q_0 \mid Q$. Doch es ist auch $Q \simeq \operatorname{Im}(\iota) = \operatorname{Kern}(\pi) = \operatorname{Kern}(p_0) \oplus Q_0 \simeq P_1 \oplus Q_0$, also ist Q als direkte Summe von projektiven Moduln auch projektiv. $\square$

Damit vereinfacht sich für erbliche Algebren Proposition 11.6: Es ist stets $\underline{\dim} \operatorname{Kern}(p_1) = 0$. Betrachte nun $\underline{\dim}\, \nu X$.

Dazu sei X unzerlegbar nicht projektiv. Nach Definition ist $\nu X = D \operatorname{Hom}_A(X, A)$. Sei $f \colon X \to A$. Dann bildet f surjektiv auf sein Bild $\operatorname{Im}(f) \subseteq A$ ab. Da A erblich, ist $\operatorname{Im}(f)$ projektiv, also $\operatorname{Im}(f) \mid X$. Nun ist X unzerlegbar, d.h. entweder ist $X \simeq A$ oder $f = 0$. Wäre aber $X \simeq A$, so wäre auch X projektiv, Widerspruch.

Daher ist $\nu X = D \operatorname{Hom}_A(X, A) = 0$, also $\underline{\dim}\, \nu X = 0$ für alle unzerlegbaren nicht projektiven X. Wir erhalten das folgende Korollar.

11.8 Korollar *Sei A erblich und $X \in A$-*`mod` *unzerlegbar.*

(a) *Ist X nicht projektiv, so ist $\underline{\dim}\,\tau X = \Phi_A(\underline{\dim}\,X)$.*

(b) *Ist X nicht injektiv, so ist $\underline{\dim}\,\tau^{-1} X = \Phi_A^{-1}(\underline{\dim}\,X)$.*

Beispiel Sei $A \simeq \left(\begin{smallmatrix} k & k\oplus k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Kroneckeralgebra.
Dann ist die Coxetermatrix

$$\Phi_A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wähle X injektiv (und damit nicht projektiv). Die injektiv unzerlegbaren Moduln haben die Dimensionsvektoren

$$\underline{\dim}\,I(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{\dim}\,I(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden τ an, d.h. für die Dimensionsvektoren von $\tau I(1) =: X_1^{(1)}$ und $\tau I(2) =: X_2^{(1)}$ erhalten wir

$$\underline{\dim}\,X_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{\dim}\,X_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Erneute Anwendung von τ liefert für die Dimensionsvektoren

$$\underline{\dim}\,X_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{\dim}\,X_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Nun überführt τ unzerlegbare Moduln in unzerlegbare Moduln. An Hand der Dimensionvektoren erkennen wir zudem, dass $X_{1/2}^{(i)}$ nicht projektiv sind. Jedoch wachsen die Dimensionen mit jeder Anwendung von τ an: Es gibt unendlich viele nicht isomorphe unzerlegbare Darstellungen mit beliebig großer Dimension.

12 Brauer-Thrall I

Wir wollen die Existenz von Auslander-Reiten Sequenzen an einem thereotischen Resultat anwenden.

12.1 Theorem *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Dann gilt entweder (a) oder (b).*

(a) *A hat endlichen Darstellungstyp, d.h. es gibt bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare A-Moduln.*

(b) *A hat unbeschränkten Darstellungstyp, d.h. für alle $n \in \mathbf{N}$ gibt es einen unzerlegbaren Modul $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$ mit $\dim_k(M) \geq n$.*

Theorem 12.1 ist bekannt als *erste Brauer-Thrall Vermutung.* Der erste Beweis stammt von Roiter 1968, ein einfacherer und allgemeinerer Beweis geht zurück auf Auslander 1974.

Neben der ersten Brauer-Thrall Vermutung gibt es auch die zweite Brauer-Thrall Vermutung, welche als Verschärfung angesehen werden kann:

Im Fall (b) in Theorem 12.1 existieren unendlich viele $d \in \mathbf{N}$, sodass es für jedes d unendlich viele Moduln mit genau d vielen Kompositionsfaktoren gibt.

Die zweite Brauer-Thrall Vermutung wurde für algebraisch abgeschlossene Körper $k = \bar{k}$ von Bongartz 1985 bewiesen. Es folgten weitere Beweise, die Aussage gilt auch für k perfekt als bekannt.

2013 ergänzte Bongartz die Aussage: *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra A über $k = \bar{k}$. Gibt es ein unzerlegbares M mit $n \geq 2$ Kompositionsfaktoren, so gibt es auch ein unzerlegbaren M' mit $n - 1$ Kompositionsfaktoren.* (*Indecomposables live in all smaller lenghts*)

12.2 Lemma *Sei X unzerlegbar. Dann existiert eine rechts minimal beinahe zerfallende Abbildung $g\colon M \to X$ und eine links minimal beinahe zerfallende Abbildung $f\colon X \to N$.*

Beweis. Sei X nicht projektiv. Dann gibt es die beinahe zerfallende Sequenz

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow M \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0$$

mit rechts minimal beinahe zerfallendem g.

Sei X projektiv. Dann ist die Inklusion $g\colon \operatorname{rad}(X) \hookrightarrow X$ rechts minimal beinahe zerfallend.

Sei X nicht injektiv. Dannn gibt es die beinahe zerfallende Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} M \longrightarrow \tau^{-1} X \longrightarrow 0$$

mit links minimal beinahe zerfallendem f.

Sei X injektiv. Dann ist $f\colon X \twoheadrightarrow X/\operatorname{soc}(X)$ links minimal beinahe zerfallend. □

Grundidee des Beweises von Theorem 12.1: Sei $\varphi\colon X \to Y$ mit $\varphi \neq 0$ und X, Y unzerlegbar gegeben.

Falls φ Isomorphismus, so können wir Y als isomorphen Modul vernachlässigen.

Falls φ irreduzibel ist, so ist φ ein direkter Summand der eindeutigen links minimal beinahe zerfallenden Abbildung $f\colon X \to N$, und wir erhalten alle möglichen Y durch die (endlich vielen) unzerlegbaren direkten Summanden von N.

Sonst faktorisiere φ über das f, d.h. finde $\varphi_1\colon N \to Y$ mit $\varphi = f\varphi_1$. Da $\varphi \neq 0$, gibt es $N_1 \mid N$ unzerlegbar und $\varphi_1'\colon N_1 \to Y$ mit $f\varphi_1' \neq 0$.

Dann setze die obigen Schritte mit φ_1' fort.

In jedem Schritt erreichen wir von X nur endlich viele Moduln Y. Idee: Ist die Dimension von X beschränkt, so muss die obige Faktorisierung irgendwann 0 werden.

12.3 Theorem (Lemma von Harada und Sai)

Sei $b \in \mathbf{N}$ und seien $M_1, \dots, M_{2^b}$ unzerlegbare A-Moduln mit Kompositionslänge $\leq b$. Sei

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \qquad\qquad \dots \xrightarrow{f_{2^b-2}} M_{2^b-1} \xrightarrow{f_{2^b-1}} M_{2^b}$$

eine Kette von Nichtisomorphismen. Dann gilt $f_1 \cdots f_{2^b-1} = 0$.

(Hier ist 2^b die optimale Schranke.)

Beweis. Für einen A-Modul M schreibe $\ell(M)$ für die Kompositionslänge von M. 24.05.2017

Wir zeigen: $\ell(\mathrm{Im}(f_1 \cdots f_{2^n-1})) \leq b - n$ durch Induktion nach $n \leq b$. Für $n = b$ folgt dann die Aussage.

Für $n = 1$: Es ist $\ell(\mathrm{Im}(f_1)) \leq b - 1$, denn sonst wäre f_1 injektiv und surjektiv, und damit ein Isomorphismus.
Induktionsschritt von n auf $n+1$: Setze $g := f_1 \cdots f_{2^n-1}$ und $h := f_{2^n+1} \cdots f_{2^{n+1}-1}$. Dann gilt $f_1 \cdots f_{2^{n+1}-1} = g f_{2^n} h$.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[rrr, bend right, "g"'] & \dots & \dots \arrow[r, "f_{2^n-1}"] & M_{2^n} \arrow[r, "f_{2^n}"] & M_{2^n+1} \arrow[r, "f_{2^n+1}"] \arrow[rrr, bend right, "h"'] & \dots & \dots \arrow[r, "f_{2^{n+1}-1}"] & M_{2^{n+1}}. \end{tikzcd}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\ell(\mathrm{Im}(g)) \leq b - n$ und $\ell(\mathrm{Im}(h)) \leq b - n$.

Gilt nun sogar $\ell(\mathrm{Im}(g)) \leq b - (n+1)$ oder $\ell(\mathrm{Im}(h)) \leq b - (n+1)$, so gilt dies auch für f und wir sind fertig.

Es bleibt also, den Fall $\ell(\mathrm{Im}(g)) = b - n = \ell(\mathrm{Im}(h))$ zu betrachten. *Angenommen*, es wäre nun auch $\ell(\mathrm{Im}(f)) = b - n$, insbesondere also $f \neq 0$. Nun gilt

$$\begin{aligned} b - n = \ell\big(\mathrm{Im}(g f_{2^n} h)\big) = \ell\big(\mathrm{Im}(g)/(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Kern}(f_{2^n} h))\big) &= \ell\big(\mathrm{Im}(g)\big) - \ell\big(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Kern}(f_{2^n} h)\big) \\ &= b - n - \ell\big(\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Kern}(f_{2^n} h)\big), \end{aligned}$$

also ist $\mathrm{Im}(g) \cap \mathrm{Kern}(f_{2^n} h) = 0$. Aus $\mathrm{Im}(g f_{2^n} h) \subseteq \mathrm{Im}(f_{2^n} h) \subseteq \mathrm{Im}(h)$ folgt nun die Ungleichung für die Kompositionslängen $b - n \leq \ell(\mathrm{Im}(f_{2^n} h)) \leq b - n$, also gilt $\mathrm{Im}(f_{2^n} h) = b - n$. Damit ist $\mathrm{Im}(f_{2^n} h) = \mathrm{Im}(g)$ und somit

$$\ell\big(\mathrm{Kern}(f_{2^n} h)\big) = \ell(M_{2^n}) - \ell\big(\mathrm{Im}(f_{2^n} h)\big) = \ell(M_{2^n}) - \ell\big(\mathrm{Im}(g)\big).$$

Insgesamt folgt also $\ell(M_{2^n}) = \ell\big(\mathrm{Im}(g)\big) + \ell\big(\mathrm{Kern}(f_{2^n} h)\big)$. Dies zeigt, mit der Aussage über den trivialen Schnitt von oben, dass $M_{2^n} = \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Kern}(f_{2^n} h)$. Da nun aber M_{2^n} unzerlegbar ist, muss entweder $g = 0$ oder $f_{2^n} h$ injektiv sein. Im ersten Fall folgt aber $f = 0$, *Widerspruch*, im zweiten Fall folgt, dass f_{2^n} injektiv ist.

Analog zeige durch Betrachtung von $g f_{2^n}$ und h, dass auch $M_{2^n} = \mathrm{Im}(g f_{2^n}) \oplus \mathrm{Kern}(h)$ gilt. Wieder muss wegen M_{2^n} unzerlegbar entweder $h = 0$ oder $g f_{2^n}$ surjektiv sein. Wieder folgt im ersten Fall $f = 0$, *Widerspruch*, während im zweiten Fall f_{2^n} surjektiv ist.

Insgesamt ist f_{2^n} also injektiv und surjektiv, also ein Isomorphismus, *Widerspruch.* $\square$

12.4 Lemma *Seien X und Y unzerlegbare Moduln mit $\mathrm{Hom}_A(X,Y) \neq 0$. Angenommen, es gibt keine Kette von s irreduziblen Morphismen zwischen unzerlegbaren Moduln*

$$X \xrightarrow{h_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{h_s} Y$$

für jedes $s \leq t$. Dann gibt es eine Kette von t irreduziblen Morphismen zwischen unzerlegbaren Moduln und einen Morphismus $g\colon X_t \to Y$ mit $f_1 \cdots f_t g \neq 0$.

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{f_t} X_t \xrightarrow{g} Y.$$

Analog gibt es dann auch eine Kette von t irreduziblen Morphismen zwischen unzerlegbaren Moduln und einen Morphismus $f\colon X \to Y_0$ mit $f g_1 \cdots g_t \neq 0$.

$$X \xrightarrow{f} Y_0 \xrightarrow{g_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{g_t} Y_t = Y.$$

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage durch Induktion über t. Für $t = 0$ ist die Aussage klar.

Induktionsschritt: Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Kette

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{f_t} X_t \xrightarrow{g} Y.$$

mit irreduziblen Abbildungen f_i und unzerlegbaren Moduln X_i, sowie $f_1 \cdots f_t g \neq 0$.

Es ist g kein Isomorphismus, denn sonst wäre bereits

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{f_t g} Y.$$

eine Kette von irreduziblen Abbildungen der Länge $< t < t+1$.

Es ist g nicht split epi, da X_t und Y unzerlegbar sind. Nach Lemma 12.2 gibt es daher eine links minimal beinahe zerfallende Abbildung $h = (h_1, \dots, h_n)\colon X_t \to Z_1 \oplus \dots \oplus Z_n$, wobei die Z_i unzerlegbare Moduln und die h_i irreduzible Abbildungen sind.

$$\begin{tikzcd} X_t \arrow[rr, "h=(h_1,\dots,h_n)"] \arrow[dr, "g"'] & & Z_1 \oplus \dots \oplus Z_n \arrow[dl, dotted, "\exists j=\begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_n \end{pmatrix}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Dann gibt es, da h links beinahe zerfallend ist, ein $j\colon Z_1 \oplus \dots \oplus Z_n \to Y$ mit $g = hj$. Da $f_1 \cdots f_t g \neq 0$, gibt es ein i mit $f_1 \cdots f_t h_i j_i \neq 0$. Doch dann ist

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{f_t} X_t \xrightarrow{h_i} Z_i \xrightarrow{j_i} Y.$$

eine Kette von $t+1$ irreduziblen Abbildungen mit $f_1 \cdots f_t h_i j_i \neq 0$. □

Beweis von Theorem 12.1. Zu zeigen ist: Hat A beschränkten Darstellungstyp (mit oberer Schranke an die Kompositionslänge b), so hat A endlichen Darstellungstyp.

Behauptung: Sind X und Y unzerlegbar mit $\mathrm{Hom}_A(X,Y) \neq 0$, so gibt es eine Kette von $t < 2^b - 1$ irreduziblen Abbildungen und unzerlegbaren Moduln

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{f_t} X_t = Y.$$

Falls nicht, so gibt es nach Lemma 12.4 ein $0 \neq f\colon X \to Y$ und eine Faktorisierung von f in $2^b - 2$ irreduzible Abbildungen $f_1, \dots, f_{2^b-2}$ und eine Abbildung g

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} \dots \quad \dots \xrightarrow{f_{2^b-2}} X_{2^b-1} \xrightarrow{g} Y.$$

Doch dann sind die f_i keine Isomorphismen und auch g kann kein Isomorphismus sein, d.h. $f = f_1 \cdots f_{2^b-2} g$ ist faktorisiert in $2^b - 1$ Nichtisomorphismen. Nach Theorem 12.3 gilt also $f = 0$, *Widerspruch*.

Also: Y kann von X durch eine Kette von höchstens $2^b - 1$ irreduziblen Abbildungen erreicht werden. Für festes X gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine links minimal beinahe zerfallende Abbildung $h\colon X \to E$ und jede irreduzible Abbildung $f\colon X \to Z$ ist ein direkter Summand von h. Insbesondere gibt es für jedes X (bis auf Isomorphie) nur endlich viele unzerlegbare Moduln Z, die von X durch eine irreduzible Abbildung erreicht werden können.

Zusammen gilt also: Für einen unzerlegbaren Modul X gibt es nur endlich viele unzerlegbare Moduln Y mit $\operatorname{Hom}_A(X, Y) \neq 0$. Insbesondere gilt dies für X projektiv unzerlegbar. Doch gibt es für jeden unzerlegbaren Modul Y einen projektiv unzerlegbaren Modul X mit $\operatorname{Hom}_A(X, Y) \neq 0$. Da nun aber A nur endlich viele projektiv unzerlegbare Moduln hat, zeigt dies, dass A endlichen Darstellungstyp hat. □

Konsequenz aus dem Beweis: Hat A endlichen Darstellungstyp, so ist jedes $0 \neq f\colon X \to Y$ eine Summe von endlichen Produkten aus Isomorphismen und irreduziblen Abbildungen. Damit bestimmt die Auslander-Reiten Theorie die Modulkategorie A-`mod` in diesem Fall vollständig.

Bongartz (1982) zeigt zudem: Ist A elementar und von endlichem Darstellungstyp, so gilt für alle unzerlegbaren Moduln X die Abschätzung

$$\dim_k X \leq \max\{2 \dim_k A, 1000\}.$$

Bezeichnet $\mathrm{u}(A)$ die Anzahl der unzerlegbaren Moduln bis auf Isomorphie, so gilt mit $d := \dim_k A$ zudem die Abschätzung

$$\mathrm{u}(A) \leq 9 d^6 2^{3d+7} + \text{lineare Terme in } d.$$

Ist $d \geq 4$, so gibt es zudem stets eine k-Algebra A mit $\mathrm{u}(A) \geq 2^{\sqrt{d}}$.

Eine wesentliche Methode (auch im Beweis der zweiten Brauer-Thrall Vermutung) ist der *multiplikative Basissatz* (Bautista, Gabriel, Roiter, Salmeron): Hat A endlichen Darstellungstyp, so gibt es eine k-Basis $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ von A mit $b_i b_j \in B$ oder $b_i b_j = 0$.

13 Auslander-Reiten Köcher

13.1 Definition Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Der *Auslander-Reiten Köcher* von A ist ein bewerteter gerichteter Graph (also ein bewerteter Köcher).

- Die Punkte sind die Isomorphieklassen von unzerlegbaren A-Moduln (geschrieben $[X]$, manchmal auch einfach X).
- Ein Pfeil $[X] \to [Y]$ bedeutet, dass es eine irreduzible Abbildung von X nach Y gibt.
- Ein Pfeil erhält die Bewertung (a, b), geschrieben $\xrightarrow{(a,b)}$, bzw. $\longrightarrow := \xrightarrow{(1,1)}$, wenn es eine links minimal beinahe zerfallende Abbildung $X \to Y^b \oplus Z$ mit $Y \nmid Z$ und eine rechts minimal beinahe zerfallende Abbildung $X^a \oplus W \to Y$ mit $X \nmid W$ gibt.

Zusätzliche Struktur: Wir ziehen von $[X]$ nach $[Y]$ einen gestrichelten Pfeil, falls $Y = \tau X$ gilt, d.h. falls Y das Auslander-Reiten Verschobene von X ist.

Hat ein Pfeil $[X] \xrightarrow{(a,b)} [Y]$ also die Bewertung (a, b), so taucht Y^b im Mittelterm der beinahe zerfallenden Sequenz auf, die mit X beginnt, bzw. X^a taucht im Mittelterm der beinahe zerfallenden Sequenz auf, die mit Y endet.

Beispiel Sei $A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ die k-Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen. Als Auslander-Reiten Köcher ergibt sich (wieder mit $\Diamond := k/k$)

$$\begin{tikzcd}
 & & \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix} \arrow[dr] & & \\
 & \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{pmatrix} \Diamond \\ k \\ k \end{pmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & \\
\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ur] & & \begin{pmatrix} \Diamond \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & \begin{pmatrix} \Diamond \\ \Diamond \\ k \end{pmatrix} \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}.$$

Hier sind alle Bewertungen gleich $(1, 1)$.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} k & k \oplus k \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Sei $P_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ der erste projektiv unzerlegbare Modul. Dieser ist nicht 29.05.2017
injektiv, also gibt es die Auslander-Reiten Sequenz (ARS)

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}(P_1) \longrightarrow 0.$$

Dann gibt es zwei linear unabhängige irreduzible Abbildungen $P_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} k \oplus k \\ k \end{pmatrix} = P_2$, da P_2 am Ende der rechts minimal beinahe zerfallenden Abbildung $\operatorname{rad}(P_2) = P_1 \oplus P_1 \hookrightarrow P_2$. Also kommt P_2 als direkter Summand in E mit Multiplizität 2 vor.

Sei $E = P_2 \oplus P_2 \oplus X \oplus \ldots$ mit X unzerlegbar. Dann gibt es eine irreduzible Abbildung $P_1 \to X$ mit $X \neq P_1, P_2$ (siehe ARS oben), also ist X nicht projektiv. Damit gibt es die ARS

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

Wegen der irreduziblen Abbildung $P_1 \to X$ ist dann $P_1 \mid E$. Also gibt es auch die irreduzible Abbildung $f\colon \tau X \to P_1$. Wäre $f \neq 0$, so wäre f surjektiv also f split, Widerspruch. Damit ist $f = 0$, also existiert τX nicht, damit existiert X nicht.

Somit wird die ARS von oben

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \oplus P_2 \longrightarrow \tau^{-1}(P_1) \longrightarrow 0.$$

Alternativ erhält man dies auch durch Bestimmung der Coxeter-Matrix Φ_A. Somit hat im Auslander-Reiten Köcher der Pfeil $[P_1] \to [P_2]$ die Bewertung $(2,2)$.

Bemerkung In der Bewertung (a,b) kann auch $a \neq b$ vorkommen, z.B. bei $A = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{C} \end{smallmatrix}\right)$.

Die Kategorie A-`mod` enthält das *Radikalideal* $\mathrm{rad}(A\text{-}\mathtt{mod})$. Dieses hat für Objekte $X, Y \in A\text{-}\mathtt{mod}$ die Morphismen

$$\mathrm{rad}_A(X,Y) := \{f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y) : \text{ für alle } Z \in A\text{-}\mathtt{mod},\ g\colon Z \to X,\ h\colon Y \to Z \text{ ist } gfh \text{ kein Iso}\}$$

Ist nämlich gfh kein Isomorphismus, so sind g, gf split mono und fh, fh split epi. Sind nun X und Y unzerlegbar, so ist g ein Isomorphismus oder h ein Isomorphismus. Also ist f ein Isomorphismus.

Gilt also $X \not\cong Y$ beide unzerlegbar, so ist $\mathrm{rad}_A(X,Y) = \mathrm{Hom}_A(X,Y)$. Gilt $X = Y$ unzerlegbar, so ist $\mathrm{rad}_A(X,Y) = \mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(X))$.

Für allgemeine X und Y mit Zerlegungen in unzerlegbare Summanden $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ und $Y = Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_\ell$ ist $f = (f_{i,j})\colon X \to Y$ im Radikal $f \in \mathrm{rad}_A(X,Y)$ genau dann, wenn die $f_{i,j}$ keine Isomorphismen sind.

Wir definieren zudem induktiv für $n \in \mathbf{N}$

$$\mathrm{rad}_A^{n+1}(X,Y) = \{fg : f \in \mathrm{rad}_A(X,Z) \text{ und } g \in \mathrm{rad}_A^n(X,Z) \text{ für ein } Z\}$$

und

$$\mathrm{rad}_A^\infty(X,Y) := \bigcap_{n \geq 1} \mathrm{rad}^n(X,Y).$$

Sei X und Y unzerlegbare Moduln. Dann ist

$$f\colon X \to Y \text{ ist irreduzibel } \Leftrightarrow f \in \mathrm{rad}(X,Y) \setminus \mathrm{rad}^2(X,Y).$$

Pfeile im Köcher einer Algebra (Übungen) $\leftrightarrow$ Pfeile im AR-Köcher einer Modulkategorie.

irr. Abbildungen zwischen projektiven $\leftrightarrow$ irr. Abbildungen zwischen unzerlegbaren.

Es sind $\mathrm{rad}_A(X,Y)$ und $\mathrm{rad}_A^2(X,Y)$ auf kanonische Art $\mathrm{End}_A(X)$-$\mathrm{End}_A(Y)$-Bimoduln. Dann ist auch $\mathrm{rad}_A(X,Y)/\mathrm{rad}_A^2(X,Y)$ ein $\mathrm{End}_A(X)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(X))$-$\mathrm{End}_A(Y)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(Y))$-Bimodul. Hierbei sind $D(X) := \mathrm{End}_A(X)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(X))$ und $D(Y) := \mathrm{End}_A(Y)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(Y))$ Schiefkörper. Es gilt nun

$$\begin{aligned}[X] \to [Y] \text{ hat Bewertung } (a,b) \ \Leftrightarrow\ a &= \dim_{D(X)} \mathrm{rad}_A(X,Y)/\mathrm{rad}_A^2(X,Y) \\ b &= \dim_{D(Y)} \mathrm{rad}_A(X,Y)/\mathrm{rad}_A^2(X,Y).\end{aligned}$$

Die Auslander-Reiten Verschiebungen τ und τ^{-1} sind (zumindest zwischen den stablien Kategorien) Äquivalenzen. Man kann zeigen, dass für Y nicht projektiv gilt

$$[X] \to [Y] \text{ hat Bewertung } (a,b) \ \Leftrightarrow\ [\tau Y] \to [X] \text{ hat Bewertung } (b,a).$$

Stricken von Auslander-Reiten Köchern Wir wollen einen Algorithmus zur Berechnung des AR-Köchers für $A = kQ$ angegeben. Erste Beispielklasse: Köcher vom Typ A_n, d.h. irgendeine Orientierung auf dem (ungerichteten) Graphen

$$\overset{1}{\bullet} \;\text{——}\; \overset{2}{\bullet} \;\text{——}\; \dots \qquad \dots \;\text{——}\; \overset{n-1}{\bullet} \;\text{——}\; \overset{n}{\bullet}.$$

Zuerst betrachte einen Köcher mit linearer Orientierung

$$Q_1 = \Big(\; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow \dots \qquad \dots \longleftarrow n-1 \longleftarrow n \; \Big)$$

und dann

$$Q_2 = \Big(\; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longleftarrow 5 \; \Big).$$

Erster Schritt: Bestimme die Dimensionsvektoren der projektiv bzw. injektiv unzerlegbaren Moduln. Für $A = kQ$ betrachte Rechtsmoduln, d.h. der projektiv unzerlegbare P_i hat als Basis alle Wege, die in i starten, während der injektiv unzerlegbare I_i als Basis alle Wege hat, die in i enden. Wir schreiben Dimensionsvektoren als Zeilenvektoren.

Für Q_1 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\underline{\dim}\, P_1 &= (1, 0, \dots, 0) & \qquad \underline{\dim}\, I_1 &= (1, \dots, 1) \\
\underline{\dim}\, P_2 &= (1, 1, 0, \dots, 0) & \qquad \underline{\dim}\, I_2 &= (0, 1, \dots, 1) \\
&\vdots & &\vdots \\
\underline{\dim}\, P_n &= (1, \dots, 1) & \qquad \underline{\dim}\, I_n &= (0, \dots, 0, 1)
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $I_1 = P_n$ der eindeutige projektiv-injektiv unzerlegbare Modul ist.

Wir beginnen das Stricken bei den projektiven Moduln (alternativ kann auch bei den injektiven Moduln begonnen werden).

Sei P unzerlegbar projektiv. Dann ist die Inklusion $\operatorname{rad}(P) \hookrightarrow P$ rechts minimal beinahe zerfallend. Also ist jede irreduzible Abbildung $f \colon X \to P$ ein direkter Summand dieser Inklusion. Da $A = kQ$ erblich ist, ist nun $f(X) \subseteq P$ projektiv. Da X unzerlegbar ist, ist also $X \simeq f(X)$, d.h. dieses X ist ein Teilmodul von P, also projektiv. Damit müssen irreduzible Abbildungen nach P in projektiven anfangen.

Wir erhalten wegen $P_i = \operatorname{rad}(P_{i+1})$ die Kette von irreduziblen Abbildungen

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & & P_n \\
 & & & P_{n-1} \arrow[ur] & \\
 & & \dots \arrow[ur] & & \\
 & P_3 \arrow[ur] & & & \\
 P_2 \arrow[ur] & & & & \\
 P_1 \arrow[u] & & & &
\end{tikzcd}$$

Außerdem gibt es kein irreduzibles $X \to P$, welches nicht in dieser Kette ist.

Sei nun $P_j \to X$ irreduzibel mit X unzerlegbar nicht projektiv. Dann gibt es die ARS

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

mit $P_j \mid E$. Also gibt es die irreduzible Abbildung $\tau X \to P_j$, doch dann muss $\tau X = P_{j-1}$ sein.

Nun beginne das Stricken von Maschen durch Vervollständigung des Diagramms vom unteren linken Rand (in P_1 kommt nichts an). Da P_1 nicht injektiv ist, gibt es die ARS

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \oplus X \oplus \ldots \longrightarrow \tau^{-1} P_1 \longrightarrow 0.$$

Hier ist P_2 im Mittelterm, da die irreduzible Abbildung $P_1 \to P_2$ existiert. Dies ist die einzige irreduzible Abbildung von P_1 in einen projektiven Modul, also ist $X \neq P_2$ nicht projektiv. Damit gibt es die ARS

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

mit $P_1 \mid E$. Doch dann müsste es eine irreduzible Abbildung $\tau X \to P_1$ geben, welche es aber nicht gibt.

Also ist $X = 0$ und die ARS von oben ist gegeben durch

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \tau^{-1} P_1 \simeq P_2/P_1 \longrightarrow 0.$$

Es ist $\underline{\dim}\, P_2/P_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, also ist $P_2/P_1 \simeq S_2$ einfach. Es ergibt sich als Zwischenstand

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & P_n \\
 & & & & P_{n-1} \arrow[ur] & \\
 & & & \cdots \arrow[ur] & & \\
 & & P_3 \arrow[ur] & & & \\
 & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
P_1 \arrow[ur] & & P_2/P_1 \arrow[ll, dashed] & & &
\end{tikzcd}$$

Weiter mit P_2: Auch dieser Modul ist nicht injektiv, also gibt es die ARS

$$0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3 \oplus S_2 \oplus X \oplus \ldots \longrightarrow \tau^{-1} P_2 \longrightarrow 0.$$

Auch hier ist X unzerlegbar und nicht projektiv, d.h. es gibt die ARS

$$0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

mit $P_2 \mid \tilde{E}$. Also gibt es auch eine irreduzible Abbildung $\tau X \to P_2$. Doch dann muss $\tau X = P_1$ sein, also $X = S_2$. Dies kommt in E aber schon vor, d.h. es ist $X = 0$ und $E = P_3 \oplus S_2$ und die ARS wird zu

$$0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_3 \oplus S_2 \longrightarrow \tau^{-1} P_2 \longrightarrow 0.$$

Als Dimensionsvektor berechnen wir $\underline{\dim}\, \tau^{-1} P_2 = (0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Aus Dimensionsgründen ist die irreduzible Abbildung $P_3 \to \tau^{-1} P_2$ surjektiv, der Kern ist S_1, also ist $\tau^{-1} P_2 = P_3/P_1$.

Es ergibt sich der Zwischenstand

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & P_n \\
 & & & & P_{n-1} \arrow[ur] & \\
 & & & \cdots \arrow[ur] & & \\
 & & P_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_3/P_1 \arrow[ll, dashed] & & \\
P_1 \arrow[ur] & & P_2/P_1 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Wiederhole diesen Schritt, erhalte Moduln $\tau^{-1}P_i = P_{i+1}/P_1$ für $i \leq n-1$. Dann ist jedoch $P_n = I_1$ projektiv und injektiv, d.h. das Ausfüllen der Maschen auf diese Weise kann nicht fortgesetzt werden. Außerdem ist auch $P_n/P_1 = I_2$ injektiv.

Damit erhalten wir die vollständige erste Reihe

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & P_n = I_1 \arrow[dr] & \\
 & & & & P_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_{n-1} \arrow[ll, dashed] \\
 & & & \cdots \arrow[ur] & & P_{n-1}/P_1 \arrow[ur] & \\
 & & P_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] & & \\
 & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_3/P_1 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & & \\
P_1 \arrow[ur] & & P_2/P_1 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

Nun setze das Verfahren analog für die zweite Reihe fort, wieder fange unten an. Wieder hört das Verfahren auf, wenn ein injektiver Modul erreicht wird, was nun nach einem Schritt weniger geschieht. Dann wiederhole dies analog für die weiteren Reihen usw., bis der erste Modul unten injektiv ist. Dann erhalten wir den vollständigen AR-Köcher

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & P_n = I_1 \arrow[dr] & & & & & \\
 & & & & P_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_2 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & \cdots \arrow[ur] & & P_{n-1}/P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots & & & \\
 & & P_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[ur] & & \cdots & & \cdots \arrow[dr] & & \\
 & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_3/P_1 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & I_{n-1} \arrow[dr] & \\
P_1 \arrow[ur] & & P_2/P_1 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & \cdots & & & & \cdots \arrow[ur] & & I_n
\end{tikzcd}$$

Konkret erhalten wir für $n = 4$, wobei wir die unzerlegbaren Moduln durch ihren Dimensionsvektor angeben, mit dem beschriebenen Algorithmus von $P_1 = 1000$ beginnend den folgenden Köcher. 31.05.2017

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1111 \arrow[dr] & & & \\
 & & 1110 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0111 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & & \\
 & 1100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0110 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0011 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & \\
1000 \arrow[ur] & & 0100 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & 0010 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & 0001 \arrow[ll, dashed]
\end{tikzcd}$$

Damit ist eine (Zusammenhangs-)komponente des ganzen AR-Köchers gestrickt. Frage: Ist dies bereits der ganze AR-Köcher?

Im linken Rand sind alle projektiv unzerlegbaren Moduln enthalten. Falls nun X unzerlegbar nicht projektiv nicht in dieser Komponente, so gibt es dennoch $f\colon P \to X$ mit $f \neq 0$ und P projektiv unzerlegbar.

Also faktorisert f über eine links minimal beinahe zerfallende Abbildung $P \to M$, welche einen Summanden $P \to M_1$ mit M_1 unzerlegbar und nicht verschwindender Komposition $P \to M_1 \to X$

haben muss. Dann ist $P \to M_1$ irreduzibel. Ist nun $X \simeq M_1$, so liegt X mit M_1 bereits in der Komponente. Falls nicht, faktorisere $P \to M_1$ wie oben erneut und erhalte $P \to M_1 \to M_2 \to X$ mit $M_1 \to M_2$ irreduzibel usw.

Ist die Komponente nun endlich, so ist die Dimension der auftauchenden Moduln beschränkt. Da alle M_i in der Komponente liegen, muss diese Faktorisierung nach dem Lemma von Harada-Sai irgendwann abbrechen, d.h. es gilt $M_\ell = X$ für ein ℓ. Damit enthält die Komponente alle unzerlegbaren Moduln (für den Fall einer endlichen Komponente, die alle projektiv unzerlegbaren Moduln enthält).

Betrachte nun den Köcher

$$Q_2 = \Big(\; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longleftarrow 5 \; \Big).$$

Wir bezeichnen die einfachen Moduln mit $1, 2, 3, 4$ bzw. 5. Die projektiv unzerlegbaren Moduln P_i mit den links minimal beinahe zerfallenden Abbildungen $\mathrm{rad}(P_i) \hookrightarrow P_i$, sowie die injektiv unzerlegbaren Moduln I_i lesen wir in folgender Liste ab.

$$\begin{array}{lcl}
P_1 = 1 & & I_1 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \\[1em]
P_2 = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} & 1 \to \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} & I_2 = \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \\[1em]
P_3 = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ 1 & & \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \oplus 4 \to \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ 1 & & \end{smallmatrix} & I_3 = 3 \\[1em]
P_4 = 4 & & I_4 = \begin{smallmatrix} 3 & & 5 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \\[1em]
P_5 = \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} & 4 \to \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} & I_5 = 5
\end{array}$$

Wir beginnen nun das Stricken des Auslander-Reiten Köchers mit $P_1 = 1$, d.h. am linken Rand (der von den projektiv unzerlegbaren gebildet wird) oben. Als Ergebnis erhalten wir den folgenden Köcher.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & & 5 \arrow[ll, dashed] \\
& \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \end{smallmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 3 & & 5 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ 1 & & \end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 3 & & 5 \\ 2 & 4 & \end{smallmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \arrow[ll, dashed] \\
& 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 3 & & 5 \\ 2 & 4 & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & \\
& & \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix} \arrow[ur] & & \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Wie beim linear orientierten A_5-Köcher erhalten wir erneut 15 unzerlegbare Moduln. Allerdings sind die Algebren nicht isomorph (unterschiedliche Dimension über k). Außerdem sind die Algebren nicht Morita-äquivalent, da Morita-Äquivalenzen unzerlegbare Moduln und irreduzible Abbildungen erhalten. Allerdings sind die beiden Algebren *Kipp-äquivalent.*

In beiden Beispielen konnten haben wir jeden unzerlegbaren Moduln in einer τ^{-1}-Bahn eines projektiv unzerlegbaren Moduls gefunden. Daher können wir den Dimensionsvektor jedes unzerlegbaren Moduls mit Hilfe der Inversen der Coxetermatrix bestimmen.

Betrachte den linear orientierten A_4-Köcher. Dann ist die Cartanmatrix

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also gilt für die Inverse der Coxetermatrix

$$\Phi_A = -C_A \left(C_A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Coxetermatrix gilt $\Phi_A(\underline{\dim}\, P_i) = -\,\underline{\dim}\, I_i$ für die projektiv unzerlegbaren P_i bzw. injektiv unzerlegbaren I_i. Damit ist $-\,\underline{\dim}\, P_i = \Phi_A^{-1}(\underline{\dim}\, I_i)$. Daher können wir zur Kontrolle prüfen, ob $\Phi_A^{-1}(\underline{\dim}\, I_i)$ negativ ist für jedes i. Wir rechnen also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten tatsächlich für den injektiven Modul einen negativen Vektor. Diese Tatsache kann gleichzeitig als Abbruchkriterium verwendet werden: Ausgehend von den Dimensionsvektoren der projektiv unzerlegbaren Moduln, wende auf diese solange Φ_A^{-1} an, bis ein injektiv unzerlegbarer Modul erreicht wird, d.h. bis Φ_A^{-1} beim nächsten Mal einen negativen Vektor liefert.

Sei nun A eine allgemeine endlichdimensionale k-Algebra von endlichem Darstellungstyp.

Frage: Was weiß der AR-Köcher von A über A-`mod`? Können wir beispielsweise Ext_A^1 oder Hom_A direkt am AR-Köcher ablesen?

Betrachte zum Beispiel den AR-Köcher

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \bullet \arrow[dr] & & & & \\
 & & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet\, Y \arrow[dr] & & & \\
 & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet\, Z \arrow[dr] & & \\
 & X\,\bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr] & \\
\underset{M}{\bullet} \arrow[ur] & & \underset{N}{\bullet} \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ur] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Es ist $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$, da die Sequenz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine AR-Sequenz, insbesondere ist die Komposition der beiden Wege 0. Nun steht jede Masche im AR-Köcher für die AR-Sequenz

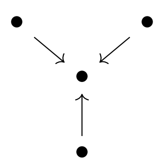
$$\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[dr, "\beta"] & & \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \oplus & E'' \arrow[r] & 0, \\
 & & F_2 \arrow[ur, "\delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

insbesondere gilt $\alpha\beta + \gamma\delta = 0$, d.h. $\alpha\beta = -\gamma\delta$, oder es gilt $\alpha\beta = 0$ (für eine halboffene Masche).

Also tragen alle Wege im AR-Köcher zwischen zwei Punkten, die durch eine Homotopie über eine Masche ineinander übergehen, zu einer Dimension im Hom-Raum bei, vorausgesetzt, keiner dieser homotopen Wege führt über eine halboffene Masche.

Wir erhalten zum Beispiel $\mathrm{Hom}_A(X, Z) = 0$, da ein Weg über eine halboffene Masche führt. Andererseits ist $\mathrm{Hom}_A(X, Y) \simeq k$, alle Wege zwischen X und Y sind homotop, doch keiner führt über eine halboffene Masche.

Weiteres Beispiel: Wir betrachten den 3-Unterraum Köcher. 12.06.2017



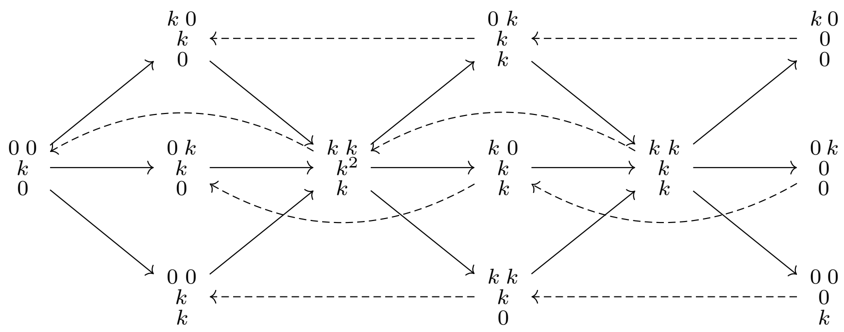
Die projektiv unzerlegbaren Moduln sind genau gegeben durch

$$\begin{smallmatrix}0\,0\\k\\0\end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix}k\,0\\k\\0\end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix}0\,k\\k\\0\end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix}0\,0\\k\\k\end{smallmatrix}$$

während die injektiv unzerlegbaren Moduln durch

$$\begin{smallmatrix}k\,0\\0\\0\end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix}0\,k\\0\\0\end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix}0\,0\\0\\k\end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix}k\,k\\k\\k\end{smallmatrix}$$

gegeben sind. Wir stricken den Auslander-Reiten Köcher, beginnend mit den projektiv unzerlegbaren und den jeweiligen Inklusionen der Radikale auf der linken Seite.

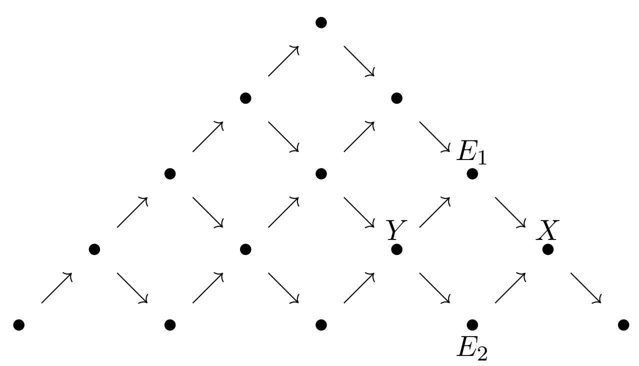


Beachte, dass in den linken fünf Spalten genau die 3-Unterraumkonfigurationen zu finden sind.

Wir kehren zurück zum linear orientierten A_n-Köcher. Nach den Auslander-Reiten Formeln (vgl. Theorem 10.6) gilt

$$\mathrm{Ext}^1_A(X, Y) = D\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}Y, X).$$

Im AR-Köcher stehen nun die projektiven Moduln ganz links, d.h. für X und Y nicht projektiv ist $\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}Y, X) \simeq \mathrm{Hom}_A(\tau^{-1}Y, X)$. Ist nun $n = 5$, so betrachte X und Y im AR-Köcher.



Dann ist $\tau^{-1}Y = X$, d.h. $\operatorname{Ext}^1_A(X,Y) = D\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}Y, X) = D\,\underline{\operatorname{Hom}}_A(X,X) \simeq k$. Insbesondere wird $\operatorname{Ext}^1_A(X,Y)$ erzeugt durch die Auslander-Reiten Sequenz

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & & E_1 \arrow[dr] & & & \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \oplus & X \arrow[r] & 0. \\ & & E_2 \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

AR-Köcher unter Quotienten Sei $A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus. Dann ist $B \simeq A/I$ mit einem Ideal $I \trianglelefteq A$. Insbesondere können wir die B-Moduln als Teilkategorie der A-Moduln auffassen, schließlich ist $M \in B\text{-}\mathtt{mod}$ genau dann, wenn $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$ und $IM = 0$.

Wir betrachten als Beispiel die folgenden Algebren A und B.

$$A := \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & k & \Diamond \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Dann ist $A \simeq kQ$ mit dem linear orientierten A_3-Köcher $\bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} \bullet$ und $B \simeq A/I$, wobei $I = \langle \alpha\beta \rangle$. Wir erinnern uns an den AR-Köcher von A.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & kkk \arrow[dr] & & \\ & kk0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0kk \arrow[ll, dashed] \arrow[dr] & \\ k00 \arrow[ur] & & 0k0 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & 00k \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

Es ist kkk kein B-Modul, da sowohl α als auch β nicht trivial operieren. Alle anderen unzerlegbaren Moduln sind hingegen B-Moduln. Als B-Moduln sind nun $kk0$ und $0kk$ projektiv und injektiv, daher sind sie als B-Moduln keine τ-Verschobenen mehr. Es ergibt sich der AR-Köcher

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & kk0 \arrow[dr] & & 0kk \arrow[dr] & \\ k00 \arrow[ur] & & 0k0 \arrow[ll, dashed] \arrow[ur] & & 00k \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

Wir erkenne, dass der AR-Köcher des Quotienten B nicht vollständig durch Einschränken des AR-Köchers von A entsteht.

Anderes Beispiel: Sei A die Kroneckeralgebra, d.h. $A \simeq \left(\begin{smallmatrix} k & k\oplus k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ bzw. die Wegealgebra zum Köcher

$$\bullet \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} \bullet.$$

Sei $B = A/\langle \beta \rangle$. Dann ist $B \simeq \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$, insbesondere ist B von endlichem Darstellungstyp. Die projektiv unzerlegbaren B-Moduln sind $\left(\begin{smallmatrix} k \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} k \\ k \end{smallmatrix}\right)$. Letzterer liegt aber im AR-Köcher von A nicht einmal in der Komponente, in der die projektiven A-Moduln liegen.

Fragen Welche Köcher haben endlichen Darstellungstyp? Beeinflusst die Orientierung den Darstellungstyp?

Gibt es Köcher von unendlichem Darstellungstyp, deren unzerlegbare Darstellungen bestimmt werden können?

Wir wollen die letzte Frage nun im Fall des Kroneckerköchers weiter untersuchen.

13.2 Definition Sei Q ein zusammenhängender Köcher und $A = kQ$ die Wegealgebra. Sei $M \in A$-$\texttt{mod}$ unzerlegbar. Dann heißt M

- *präprojektiv* (bzw. postprojektiv), falls es einen projektiv unzerlegbaren Modul P und ein $n \in \mathbf{N}_0$ gibt mit $M = \tau^{-n}P$.
- *präinjektiv*, falls es einen injektiv unzerlegbaren Modul I und ein $n \in \mathbf{N}_0$ gibt mit $M = \tau^n I$.
- *regulär*, falls M weder präprojektiv noch präinjektiv ist.

Die Pfeile im Köcher stehen für irreduzible Abbildungen $P \to P'$ zwischen projektiv unzerlegbaren Moduln P und P', welche als direkte Summanden in der beinahe zerfallenden Abbildung $\operatorname{rad}(P) \to P$ auftreten.

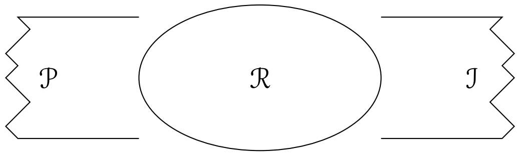
13.3 Lemma *Sei Q zusammenhängend. Dann liegen alle projektiv unzerlegbaren Moduln in einer AR-Komponente. Genauso liegen alle injektive unzerlegbaren Moduln in einer AR-Komponente.*

Mit Brauer-Thrall I ergibt sich nun das folgende Korollar.

13.4 Korollar *Sei Q ein zusammenhängender Köcher. Dann ist kQ darstellungsendlich genau dann, wenn alle Moduln präprojektiv sind, genau dann, wenn alle Moduln präinjektiv sind.*

Wir führen folgende Bezeichnungen ein. Für eine Wegealgebra kQ über einem zusammenhängenden Köcher Q und ihren Auslander-Reiten Köcher $\mathcal{A}$ sei

- $\mathcal{P}$ die Komponente von $\mathcal{A}$, die alle präprojektiven Moduln enthält.
- $\mathcal{I}$ die Komponente von $\mathcal{A}$, die alle präinjektiven Moduln enthält.
- $\mathcal{R}$ die Vereinigung alle Komponenten von $\mathcal{A}$, die nur reguläre Moduln enthalten.



Seien X und Y unzerlegbar. Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus der über einen projektiven Modul P faktorisiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & P \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

D.h. es gilt $f = gh$. Da kQ erblich ist, ist $\operatorname{Im}(g) \subseteq P$ auch projektiv und g bildet surjektiv auf $\operatorname{Im}(g)$ ab, d.h. es ist $\operatorname{Im}(g) \mid X$. Doch da X unzerlegbar ist, gilt entweder $X = 0$, also $f = 0$ oder $X \simeq \operatorname{Im}(g)$, d.h. X ist selbst projektiv. Ist nun X nicht projektiv, so folgt damit $\underline{\operatorname{Hom}}_A(X,Y) = \operatorname{Hom}_A(X,Y)$.

13.5 Lemma *Sei $A = kQ$ und $X, Y \in A$-$\texttt{mod}$ unzerlegbar nicht projektiv.*

Dann gilt $\operatorname{Hom}_A(X,Y) = \underline{\operatorname{Hom}}_A(X,Y)$. *Insbesondere ist für X und Y nicht projektiv und nicht injektiv* $\operatorname{Hom}_A(X,Y) = \operatorname{Hom}_A(\tau X, \tau Y) = \operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}X, \tau^{-1}Y)$.

13.6 Proposition *Sei $A = kQ$, seien X und Y unzerlegbare A-Moduln. Dann gilt.*

(a) *Ist Y präprojektiv und X nicht präprojektiv, so ist* $\operatorname{Hom}_A(X,Y) = 0$.

(b) *Ist X präinjektiv und Y nicht präinjektiv, so ist* $\operatorname{Hom}_A(X,Y) = 0$.

D.h. Homomorphismen gehen von $\mathcal{P}$ zu $\mathcal{R}$ zu $\mathcal{I}$, aber nie umgekehrt.

Beweis. Wir zeigen (b). Sei X präinjektiv, d.h. es gibt I injektiv unzerlegbar mit $\ell \in \mathbf{N}_0$ und

$X = \tau^\ell I$. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(\tau^\ell I, Y) \simeq \mathrm{Hom}_A(I, \tau^{-\ell} Y)$.

Sei nun $f\colon I \to \tau^{-\ell}Y$. Dann faktorisiert f über sein Bild $\mathrm{Im}(f) \simeq I/\mathrm{Kern}(f)$. Da A erblich, ist $\mathrm{Im}(f)$ als Quotient eines injektiven wieder injektiv. Da $\mathrm{Im}(f)$ jedoch injektiv nach $\tau^{-\ell}Y$ unzerlegbar abbildet, ist $\mathrm{Im}(f) = 0$ oder $\mathrm{Im}(f) = \tau^{-\ell}Y$.

Im zweiten Fall wäre jedoch $Y = \tau^\ell \mathrm{Im}(f)$ präinjektiv, also muss $f = 0$ gelten. Damit ist $\mathrm{Hom}_A(X, Y) = \mathrm{Hom}_A(I, \tau^{-\ell}Y) = 0$. □

Seien nun X und Y reguläre Moduln. Ist $M \subseteq X$, so hat M keine präinjektiven Summanden. Ist $X \twoheadrightarrow N$, so hat N keinen projektiven direkten Summanden.

Ist also $f\colon X \to Y$, so faktorisiert $(f\colon X \to Y) = (X \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow Y)$ über sein Bild. Damit kann $\mathrm{Im}(f)$ nur reguläre direkte Summanden haben.

Darstellungstheorie der Kroneckeralgebra Sei von nun $A = kQ$ die Kroneckeralgebra. Wir erinnern an die Cartanmatrix und die Coxetermatrix.

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=I} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{=:N}$$

Damit ist $\Phi_A = I + N$ mit $N^2 = 0$. Insbesondere ist $\Phi_A^{-1} = I - N$. Weiterhin wird $\Phi_A^n = I + nN$ für $n \in \mathbf{Z}$. Nun können wir die Dimensionvektoren der präprojektiven und präinjektiven Moduln bestimmen. Diese sind zudem durch ihren Dimensionvektor eindeutig bestimmt (da die proj./inj. unzerlegbaren durch ihren Dimensionsvektor eindeutig bestimmt sind).

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau^{-n} P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n \\ 2n \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau^{-n} P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n \\ 2n \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau^{n} I_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n \\ 2n \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau^{n} I_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n \\ 2n \end{pmatrix}$$

Damit enthält $\mathcal{P}$ alle unzerlegbaren Moduln mit Dimensionvektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ und $a - b = 1$, es enthält $\mathcal{I}$ alle unzerlegbaren Moduln mit Dimensionvektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ und $b - a = 1$.

Ein unzerlegbarer Modul mit Dimensionsvektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ ist in $\mathcal{R}$, falls $\Phi_A^n \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ nichtnegative Einträge hat für alle $n \in \mathbf{Z}$. Doch ist $\Phi_A^n = I + nN$. Damit muss $N\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = 0$, also $a = b$ gelten.

Insgesamt gilt also für einen unzerlegbaren Modul X mit Dimensionsvektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned} X \text{ ist präprojektiv} &\Leftrightarrow a > b \\ X \text{ ist präinjektiv} &\Leftrightarrow a < b \\ X \text{ ist regulär} &\Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

Sei nun X unzerlegbar regulär. Dann gibt es die exakte Sequenz 14.06.2017

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Kern}(f) & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) & \longrightarrow 0. \\ \underline{\dim} & & & & & \left(\begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix}\right) & & \left(\begin{smallmatrix} b \\ b \end{smallmatrix}\right) & \end{array}$$

Also ist $\underline{\dim}\,\mathrm{Kern}(f) = \left(\begin{smallmatrix} c \\ c \end{smallmatrix}\right)$ mit $c = a - b$. Es bildet $\mathrm{Kern}(f)$ auf X ab, also ist $\mathrm{Kern}(f)$ eine direkte Summe aus präprojektiven und regulären Moduln. Doch präprojektive Moduln haben einen Dimensionsvektor $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ mit $a > b$, daher muss $\mathrm{Kern}(f)$ eine direkte Summe von regulären Moduln sein.

Analog zeige: $\mathrm{Cokern}(f)$ ist direkte Summe von regulären Moduln.

13.7 Proposition *Sei $A = kQ$ die Kroneckeralgebra und sei $\mathcal{R}$ die volle additive Teilkategorie der regulären Moduln. Dann ist $\mathcal{R}$ eine abelsche Kategorie durch Einschränken der abelschen Struktur von A-*`mod`.

Es stellt sich die Frage, ob $\mathcal{R}$ selbst eine Modulkategorie ist. Dazu betrachte für $\lambda \in k$ den regulären Modul

$$M_{1,\lambda} = \left(k \underset{\lambda}{\overset{1}{\leftleftarrows}} k. \right)$$

Dieser Modul hat nur den projektiven Modul $k \leftleftarrows 0$ als Teilmodul, also ist $M_{1,\lambda}$ ein einfaches Objekt in $\mathcal{R}$.

Ist nun $|k| = \infty$, so erhalten wir auf diese unendlich nichtisomorphe einfache Objekte in $\mathcal{R}$. Also kann $\mathcal{R}$ nicht die Modulkategorie einer endlichdimensionalen k-Algebra sein. Da $\mathcal{R}$ jedoch nur endlichdimensionale Moduln enthält, kann $\mathcal{R}$ auch nicht die Modulkategorie einer unendlichdimensionalen k-Algebra sein.

(Später: $\mathcal{R}$ enthält weder projektive noch injektive Objekte).

Für ein Element $p = [a : b] \in \mathbf{P}^1(k)$ der projektiven Geraden bezeichnen wir mit R_p einen Repräsentanten der Isomorphieklasse des regulären A-Moduls $k \underset{b}{\overset{a}{\leftleftarrows}} k$.

13.8 Proposition *Seien $p, q \in \mathbf{P}^1(k)$. Dann gilt.*

(a) $\mathrm{End}_A(R_p) = k$.

(b) $\mathrm{Hom}_A(R_p, R_q) = 0$ *für* $p \neq q$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_A(R_p, R_q) = \begin{cases} k & p = q \\ 0 & p \neq q. \end{cases}$

(d) $\tau R_p \simeq R_p$.

Beweis. Wir haben (a), (b) und (d) früher bereits gezeigt.

Für (c) lösen wir R_p projektiv auf.

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & \longrightarrow & S_1 = P_1 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & R_p & \longrightarrow & 0 \\ \underline{\dim} & & & \binom{1}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{1}{1} & & \end{array}$$

Nun wenden wir $\mathrm{Hom}_A(-, R_q)$ an und erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R_p, R_q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_2, R_q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_1, R_q) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(R_p, R_q) \longrightarrow 0. \quad (*)$$

Es ist $P_2 = Ae_2$, also $\mathrm{Hom}_A(P_2, R_q) \simeq e_2 R_q \simeq k$. Ebenso ist $\mathrm{Hom}_A(P_1, R_q) \simeq e_1 R_q \simeq k$. Nach (b) ist $\mathrm{Hom}_A(R_p, R_q) \simeq 0$ für $p \neq q$. Die Exaktheit von $(*)$ impliziert daher $\mathrm{Ext}^1_A(R_p, R_q) \simeq 0$. Ist hingegen $p = q$, so ist nach (a) nun $\mathrm{Hom}_A(R_p, R_q) \simeq k$, also zeigt die Exaktheit von $(*)$ jetzt $\mathrm{Ext}^1_A(R_p, R_q) \simeq k$. □

Damit ist eine Auslander-Reiten Sequenz

$$0 \longrightarrow \tau R_p = R_p \longrightarrow E \longrightarrow R_p \longrightarrow 0$$

eine beliebig wählbare nicht zerfallende Sequenz dieser Form. Da es Abbildungen $\neq 0$ von und nach E gibt, ist $E \in \mathcal{R}$ und hat den Dimensionsvektor $\binom{2}{2}$.

Wäre nun $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots$, so wäre für $E \neq E_1$ also $\underline{\dim}\, E_1 = \binom{1}{1}$, d.h. $E_1 \simeq R_q$ für ein $q \in \mathbf{P}^1(k)$. Außerdem muss $\mathrm{Hom}_A(R_p, E_1) \neq 0$ sein, da sonst die Sequenz zerfallen würde. Also gilt $E_1 = R_p$. Doch dann ist $\mathrm{Hom}_A(R_p, E_1) = k$. Aber $R_p \to E_1$ in der Sequenz muss eine irreduzible Abbildung sein, kann also kein Vielfaches der Identität sein, Widerspruch.

Damit ist E unzerlegbar.

Für $p = [1 : \lambda]$ wähle nun $E = E_p$ als

$$E_p \qquad\qquad k^2 \underset{\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)}{\overset{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}{\leftleftarrows}} k^2.$$

Dann sind die Abbildungen in der exakten Sequenz gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
R_p \arrow[d] & k \arrow[d, "(0\ 1)"'] & k \arrow[l, shift left, "1"'] \arrow[l, shift right, "\lambda"] \arrow[d, "(0\ 1)"] \\
E_p \arrow[d] & k^2 \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"'] & k^2 \arrow[l, shift left, "\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[l, shift right, "\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)"] \\
R_p & k & k. \arrow[l, shift left, "1"'] \arrow[l, shift right, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, dass die Sequenz mit E_p als Mittelterm nicht zerfällt zeigen wir, dass jede Abbildung $E_p \to R_p$ ein skalares Vielfaches der oben angegebenen ist. Seien also $a, b, c, d \in k$ gegeben mit

$$\begin{tikzcd}
E_p \arrow[d] & k^2 \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)"'] & k^2 \arrow[l, shift left, "\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[l, shift right, "\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}c\\d\end{smallmatrix}\right)"] \\
R_p & k & k. \arrow[l, shift left, "1"'] \arrow[l, shift right, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Dann gelten

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\cdot 1 \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\cdot \lambda$$

Aus der ersten Gleichung folgt $a = c$ und $b = d$, und damit zeigt die zweite Gleichung $a\lambda + b = \lambda a$, also $b = 0$. Damit ist die Sequenz nicht zerfallend.

Also ist eine beinahe zerfallende Sequenz mit R_p als Anfangs- und Endterm durch

$$0 \longrightarrow R_p \longrightarrow E_p \longrightarrow R_p \longrightarrow 0$$

gegeben, wobei

$$E_p = \begin{cases} k^2 \underset{\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)}{\overset{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}{\leftleftarrows}} k^2 & p = [1 : \lambda] \\[2em] k^2 \underset{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}{\overset{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)}{\leftleftarrows}} k^2 & p = [0 : 1]. \end{cases}$$

Beachte, dass $\underline{\dim}\, E_p = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right) = \Phi_A \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right) = \underline{\dim}\, \tau E_p$.

Sei nun umgekehrt X regulär mit $\underline{\dim}\, X = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right)$. Gilt dann $X \simeq E_p$ für ein $p \in \mathbf{P}^1(k)$, bzw. gibt es ein solches p mit $R_p \hookrightarrow X$? Die Antwort ist *ja*, falls $k = \bar{k}$, d.h. falls k algebraisch abgeschlossen ist.

Dazu sei nun $X = \left(k^2 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} k^2\right)$ unzerlegbar.

Erster Fall: f ist ein Isomorphismus. Setze $h := gf^{-1}\colon k^2 \to k^2$. Da k algebraisch abgeschlossen ist, hat h einen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor $v \in k^2$. Definiere nun $R_p \hookrightarrow X$ für $p = [1 : \lambda]$ durch

$$\begin{tikzcd} R_p \arrow[dd, hook] & k \arrow[dd, "vf"'] & k \arrow[l, shift right, "1"'] \arrow[l, shift left, "\lambda"] \arrow[dd, "v"] \\ & & \\ X & k^2 & k^2. \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

Dann gilt $vf = vf$ und $\lambda vf = vhf = vg$, sowie $v \neq 0$ und da f ein Isomorphismus ist auch $vf \neq 0$. Damit existiert diese Abbildung $R_p \hookrightarrow X$.

Zweiter Fall: f ist kein Isomorphismus. Sei $0 \neq v \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann ist $v \notin \mathrm{Kern}(g)$, denn sonst wäre X zerlegbar. Definiere die Abbildung $R_p \hookrightarrow X$ für $p = [0 : 1]$ durch

$$\begin{tikzcd} R_p \arrow[dd, hook] & k \arrow[dd, "vg"'] & k \arrow[l, shift right, "0"'] \arrow[l, shift left, "1"] \arrow[dd, "v"] \\ & & \\ X & k^2 & k^2. \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

Dann gilt $0vg = 0 = vf$ und $vg = vg$, ebenso sind $v \neq 0 \neq vg$. Damit existiert auch hier die Abbildung $R_p \hookrightarrow X$.

Insgesamt: Ist $k = \bar{k}$ und X unzerlegbar mit $\underline{\dim}\, X = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, so gibt es ein $p \in \mathbf{P}^1(k)$, sodass R_p ein Teilmodul von X ist. Ein ähnliches Argument funktioniert auch für X unzerlegbar mit $\underline{\dim}\, X = \left(\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right)$.

Wir wollen nun die Komponente der regulären A-Moduln im AR-Köcher stricken. Wir haben bereits die AR-Sequenz

$$0 \longrightarrow R_p \longrightarrow E_p \longrightarrow R_p \longrightarrow 0. \tag{$*$}$$

Nun betrachte

$$0 \longrightarrow \tau E_p \longrightarrow F \longrightarrow E_p \longrightarrow 0$$

mit $F = R_p \oplus \ldots$ und $\underline{\dim}\, F = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$. Es kommt R_p genau einmal in F als Summand vor, da $R_p \to E_p$ (bis auf skalare Vielfache) die eindeutige irreduzible Abbildung aus R_p heraus ist.

Wären nun X_1 und X_2 zwei weitere Summanden von F, so sind beide regulär, also hat einer von ihnen den Dimensionsvektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $\underline{\dim}\, X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $X_1 \simeq R_q$ für ein $p \neq q \in \mathbf{P}^1(k)$. Doch dann müsste es eine Abbildung $R_q \to E_p$ geben, also müsste $\mathrm{Hom}_A(R_q, E_p) \neq 0$ gelten. Wenden wir nun $\mathrm{Hom}_A(R_q, -)$ auf $(*)$ an, so erhalten wir die exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_A(R_q, R_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R_q, E_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(R_q, R_p).$$

Hier ist aber $\mathrm{Hom}_A(R_q, R_p) = 0$, also auch $\mathrm{Hom}_A(R_q, E_p) = 0$, *Widerspruch.*

Analog zeige $\mathrm{Hom}_A(E_q, R_p) = 0$ für $p \neq q$. Allerdings muss $\tau E_p = E_q$ auf R_p nicht trivial abbilden, d.h. es gilt $\tau E_p = E_p$.

Damit ist $F = R_p \oplus X$, wobei X unzerlegbar ist mit $\underline{\dim}\, X = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Ist $p = [1 : \lambda]$, so ist ein solches $X = X_p$ gegeben durch

$$k^3 \underset{\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)}{\overset{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}{\leftleftarrows}} k^3.$$

Insgesamt erhalten wir also die AR-Sequenz

$$0 \longrightarrow E_p \longrightarrow R_p \oplus X_p \longrightarrow E_p \longrightarrow 0.$$

Halte nun ein $p \in \mathbf{P}^1(k)$ fest. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbf{N}$ einen unzerlegbaren Modul vom Dimensionsvektor $\left(\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right)$, auf den R_p abbildet und es gibt die AR-Sequenzen (Moduln dargestellt durch ihren Dimensionsvektor).

$$0 \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow 0$$

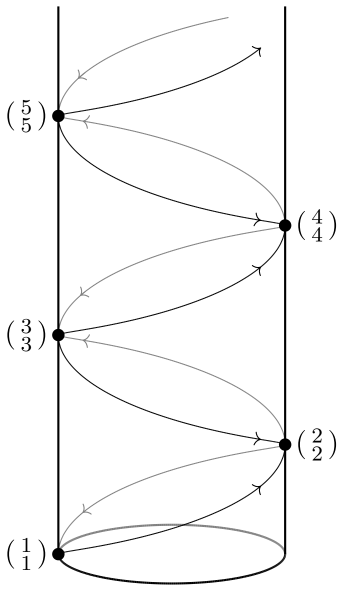
$$0 \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

Damit gibt es zu jedem $p \in \mathbf{P}^1(k)$ eine reguläre Komponente des AR-Köchers von A, wir nennen diese *Röhre* $\mathcal{R}_p$ zu p. Dann gilt für die ganze reguläre Komponente

$$\mathcal{R} = \bigsqcup_{p \in \mathbf{P}^1(k)} \mathcal{R}_p.$$

Der Modul in $\mathcal{R}_p$ zum Dimensionsvektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ heißt *quasieinfach*.



Jede Röhre $\mathcal{R}_p$ ist für sich eine abelsche Kategorie, jedoch ohne projektive und injektive Objekte.

Im Gesamtergebnis ist die Stuktur hier ähnlich zur Struktur im Fall der $k[x]$-Moduln, wo die Jordansche Normalform die unzerlegbaren Darstellungen bestimmt.

Die Kroneckeralgebra ist *zahm erblich*, d.h. die unzerlegbaren Moduln finden sich in Familien parametrisiert durch einen Parameter (hier der Eigenwert λ).

14 Spiegelungsfunktoren

Seien Q_1 und Q_2 Köcher mit dem gleichen zugrunde liegenden (nicht orientierten) Graphen. Haben dann Q_1 und Q_2 gleich viele unzerlegbare Darstellungen?

Ziel für dieses Kapitel: Wir wollen Vergleichsfunktoren (keine Äquivalenzen) konstruieren, die Orientierungsänderungen im Köcher kontrollieren.

Notation für diesen Abschnitt: Sei Q ein (nicht orientierter) Graph, sei $\vec{Q}$ ein Köcher mit zugrunde liegendem Graphen Q.

14.1 Definition Sei $\vec{Q}$ ein Köcher und $i \in Q_0$ ein Punkt darin. Dann heißt i *Quelle*, wenn in i kein Pfeil endet und i heißt *Senke*, wenn in i kein Pfeil beginnt.

Sei i eine Quelle oder eine Senke. Dann sei $\sigma_i\vec{Q}$, genannt *Spiegelung an* i, der Köcher, der aus $\vec{Q}$ durch Umdrehen aller Pfeile an i entsteht.

14.2 Definition Eine Anordnung $i_1, \dots, i_n$ von Q_0 heißt *zulässig*, wenn für $j = 1, \dots, n$ stets 19.06.2017
i_j stets eine Senke in $\sigma_{i_{j-1}} \cdots \sigma_{i_1}\vec{Q}$ ist.

Das heißt es gilt: i_1 ist eine Senke in $\vec{Q}$, i_2 ist eine Senke in $\sigma_{i_1}\vec{Q}$, usw.

Beispiel

$$\begin{tikzcd}
 & & & i_3 \arrow[dr] & & \\
i_6 \arrow[r] & i_5 & \arrow[l] \arrow[ur] \arrow[dr] & & i_2 \arrow[r] & i_1 \\
 & & & i_4 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

14.3 Lemma

(a) *Sei $i_1, \dots, i_n$ eine zulässige Anordnung von Q_0. Dann ist $\sigma_{i_n} \cdots \sigma_{i_1}\vec{Q} = \vec{Q}$.*

(b) *Eine zulässige Anordnung existiert genau dann, wenn $\vec{Q}$ keinen orientierten Zyklus enthält.*

Beweis. Zu (a): Sei $\alpha\colon a \to b$ ein Pfeil in Q_1. Es werde a im Schritt j eine Senke, d.h. es gelte $a = i_j$. Also wurde α im Schritt $h < j$ umgedreht, also $b = i_h$. In allen anderen Schritten ändert sich an α nichts. Also: α wird im Schritt h umgedreht, im Schritt j noch einmal.

Zu (b): Enthält $\vec{Q}$ einen orientierten Zyklus, so könne die Punkte im Zyklus durch Spiegeln an Senken nie selbst zu Senken werden.

Enthält $\vec{Q}$ keinen orientierten Zyklus, so gibt es einen längsten orientierten Weg. Der Endpunkt dieses Weges ist dann eine Senke, welche wir als i_1 setzen. Die Aussage folgt durch Induktion. □

Für endlichdimensionale Wegealgebren gibt es also immer zulässige Anordnungen.

14.4 Definition Sei $i \in Q_0$ eine Senke. Der *Spiegelungsfunktor*

$$S_i^+\colon k\vec{Q}\text{-}\mathtt{rep} \longrightarrow k\sigma_i\vec{Q}\text{-}\mathtt{rep}.$$

ist definiert auf Objekten für $X \in k\vec{Q}$-`rep` durch $Y := S_i^+ X$ mit

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \neq i \\ \operatorname{Kern}\left(\bigoplus\limits_{\alpha \in Q_1,\, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{(X_\alpha)_\alpha} X_i \right) & \text{für } j = i \end{cases}$$

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{für } t(\alpha) \neq i \\ \left[Y_i \hookrightarrow \bigoplus\limits_{\beta \in Q_1,\, t(\beta)=i} X_{s(\beta)} \twoheadrightarrow X_{s(\alpha)} \right] & \text{für } t(\alpha) = i \end{cases}$$

und auf Morphismen für $f \in \operatorname{Hom}_{k\vec{Q}}(X, X')$ durch $g = S_i^+ f \colon S_i^+ X \to S_i^+ X'$ mit

$$g_j = \begin{cases} f_j & \text{für } j \neq i \\ \left[Y_i \hookrightarrow \bigoplus\limits_{\alpha \in Q_1,\, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{(f_{s(\alpha)})_\alpha} \bigoplus\limits_{\alpha \in Q_1,\, t(\alpha)=i} X'_{s(\alpha)} \right] & \text{für } j = i. \end{cases}$$

Nachzuprüfen: g_i bildet nach Y_i' ab und g ist ein Homomorphismus von Darstellungen. Dazu betrachte

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists g_i"] & \bigoplus_{\alpha \in Q_1,\, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \arrow[r, "(X_\alpha)_\alpha"] \arrow[d, "(f_{s(\alpha)})_\alpha"] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ Y_i' \arrow[r] & \bigoplus_{\alpha \in Q_1,\, t(\alpha)=i} X'_{s(\alpha)} \arrow[r, "(X'_\alpha)_\alpha"] & X_i'. \end{tikzcd}$$

Da f ein Homomorphismus von Darstellungen ist, kommutiert das rechte Quadrat. Nach der universellen Eigenschaft des Kerns gibt es also eine induzierte Abbildung $Y_i \to Y_i'$, welche genau mit dem g_i wie oben definiert übereinstimmt. Außerdem kommutiert für alle α mit $t(\alpha) = i$ und $s(\alpha) = j$

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d, "g_i"] & Y_j = X_j \arrow[d, "g_j = f_j"] \\ Y_i' \arrow[r] & Y_j' = X_j'. \end{tikzcd}$$

Damit ist g ein Homomorphismus von Darstellungen. Direktes Nachrechnen zeigt zudem $S_i^+(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_Y$ und $S_i^+(fg) = S_i^+(f) S_i^+(g)$, d.h. S_i^+ ist ein Funktor.

Beispiel Sei $\vec{Q} = 2 \longrightarrow 1$. Betrachte die Senke $i = 1$. Die unzerlegbaren Darstellungen sind $0 \xrightarrow{0} k$, $k \xrightarrow{1} k$ und $k \xrightarrow{0} 0$. Wir wenden S_1^+ an.

$$\begin{tikzcd} 2 & 0 \arrow[d] & & 0 & & 0 \\ 1 & k & \arrow[from=1-2, to=2-2, phantom] \xrightarrow{S_1^+} & \operatorname{Kern}(0 \to k) \arrow[u] & = & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 2 & k \arrow[d, "1"] & & k & & k \\ 1 & k & \xrightarrow{S_1^+} & \operatorname{Kern}(k \to k) \arrow[u] & = & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 2 & k \arrow[d] & & k & & k \\ 1 & 0 & \xrightarrow{S_1^+} & \operatorname{Kern}(k \to 0) \arrow[u] & = & k. \arrow[u, "1"] \end{tikzcd}$$

Beachte den *blinden Fleck im Spiegel* für $0 \xrightarrow{0} k$.

Beispiel Betrachte den 4-Unterraumköcher

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\
& 0 & \\
2 \arrow[ur] & & 4. \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Wir betrachten die Senke bei $i = 0$. Für $[\lambda : \mu] \neq [\lambda' : \mu']$ in $\mathbf{P}^1(k)$ erhalten wir nichtisomorphe Darstellungen durch

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[dr, "{(1\ 0)}"] & & k \arrow[dl, "{(1\ 1)}"] \\
& k^2 & \\
k \arrow[ur, "{(0\ 1)}"] & & k. \arrow[ul, "{(\lambda\ \mu)}"]
\end{tikzcd}$$

Durch Anwenden von S_0^+ erhalten wir bei $i = 0$ den zweidimensionalen Vektorraum

$$X = \mathrm{Kern}(k \oplus k \oplus k \oplus k \longrightarrow k^2)$$

mit Basis $(-1, -1, 1, 0)$ und $(-\lambda, -\mu, 0, 1)$. Damit erhalten wir also Spiegelung

$$\begin{tikzcd}
k & & k \\
& k^2 \arrow[ul, "{\begin{pmatrix} -1 \\ -\lambda \end{pmatrix}}"'] \arrow[ur, "{\binom{1}{0}}"] \arrow[dl, "{\begin{pmatrix} -1 \\ -\mu \end{pmatrix}}"'] \arrow[dr, "{\binom{0}{1}}"] & \\
k & & k.
\end{tikzcd}$$

Auch die Spiegelung ist eine Familie paarweise nichtisomorpher unzerlegbarer Darstellungen parametrisiert durch $[\lambda : \mu] \in \mathbf{P}^1(k)$.

Wir definieren nun den umgekehrten Spiegelungsfunktor für Quellen.

14.5 Definition Sei $i \in Q_0$ eine Quelle. Der *Spiegelungsfunktor*

$$S_i^- : k\vec{Q}\text{-}\mathtt{rep} \longrightarrow k\sigma_i\vec{Q}\text{-}\mathtt{rep}.$$

ist definiert auf Objekten für $X \in k\vec{Q}\text{-}\mathtt{rep}$ durch $Y := S_i^- X$ mit

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \neq i \\ \mathrm{Cokern}\left(X_i \xrightarrow{(X_\alpha)_\alpha} \bigoplus\limits_{\alpha \in Q_1,\, s(\alpha) = i} X_{t(\alpha)} \right) & \text{für } j = i \end{cases}$$

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{für } s(\alpha) \neq i \\ \left[Y_{t(\alpha)} = X_{t(\alpha)} \hookrightarrow \bigoplus\limits_{\beta \in Q_1,\, s(\beta) = i} X_{t(\beta)} \twoheadrightarrow Y_i \right] & \text{für } s(\alpha) = i \end{cases}$$

und auf Morphismen für $f \in \mathrm{Hom}_{k\vec{Q}}(X, X')$ durch $g = S_i^- f \colon S_i^- X \to S_i^- X'$ mit

$$g_j = \begin{cases} f_j & \text{für } j \neq i \\ \text{siehe folgendes Diagramm} & \text{für } j = i. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[d, dotted, "\exists g_i"'] & \bigoplus X_{t(\alpha)} \arrow[l] \arrow[d, "(f_{t(\alpha)})_\alpha"] & X_i \arrow[l] \arrow[d, "f_i"] \\
Y'_i & \bigoplus X'_{t(\alpha)} \arrow[l] & X'_i. \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Die Existenz von g_i folgt aus der universellen Eigenschaft des Cokerns.

Beispiel Sei $\vec{Q} = 2 \longleftarrow 1$. Betrachte die Quelle $i = 1$.

$$\begin{tikzcd}
2 & 0 & & o \arrow[dd, "1"] & & 0 \arrow[dd] \\
 & & {} \arrow[r, "S_1^-"] & {} & = & \\
1 & k \arrow[uu] & & \mathrm{Cokern}(k \to 0) & & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
2 & k & & k \arrow[dd] & & k \arrow[dd] \\
 & & {} \arrow[r, "S_1^-"] & {} & = & \\
1 & k \arrow[uu, "1"] & & \mathrm{Cokern}(k \to k) & & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
2 & k & & k \arrow[dd, "1"] & & k \arrow[dd, "1"] \\
 & & {} \arrow[r, "S_1^-"] & {} & = & \\
1 & 0 \arrow[uu] & & \mathrm{Cokern}(0 \to k) & & k.
\end{tikzcd}$$

Für $0 \longleftarrow k$ erhalten wir hier den blinden Fleck im Spiegel, während für die anderen beiden unzerlegbaren Darstellungen S_1^- den Spiegelungsfunktor S_1^+ gerade invertiert.

14.6 Theorem *Sei $\vec{Q}$ ein Köcher ohne Schleifen und ohne orientierte Zykel. Sei $i \in Q_0$ eine Quelle oder eine Senke. Sei k ein Körper. Dann definieren S_i^+ und S_i^- zueinander inverse Bijektionen*

$$\left\{\textit{unz. } k\vec{Q}\textit{-Darstellungen} \not\simeq S(i)\right\}\Big/\simeq \quad \longleftrightarrow \quad \left\{\textit{unz. } k\sigma_i\vec{Q}\textit{-Darstellungen} \not\simeq S(i)\right\}\Big/\simeq .$$

Bemerkung Beachte, dass $S(i)$ von S_i^+ bzw. S_i^- stets auf 0 abgebildet wird, während es für X unzerlegbar und $X \not\simeq S(i)$ ein $j \neq i$ gibt mit $X_j \neq 0$, d.h. hier kann $S_i^+ X$ bzw. $S_i^- X$ nicht die Nulldarstellung sein.

Wir wollen auch zeigen, dass die Spiegelungsfunktoren $S_i^\pm$ auf Dimensionsvektoren eine Spiegelung $\underline{\dim}\, X \to \sigma_i(\underline{\dim}\, X)$ bewirken. Hier ist σ_i die Spiegelung im $\mathbf{R}^n$ an der Hyperebene senkrecht zum i-ten Standardbasisvektor. Die offensichtliche Ausnahme gilt für $e_i = \underline{\dim}\, S(i)$, hier ist $\sigma_i(e_i) = -e_i$ negativ.

14.7 Definition Sei Q ein Graph (ohne Orientierung). Für $i, j \in Q_0$ sei $d_{ij} = d_{ji}$ die Anzahl der Kanten zwischen i und j. Wir definieren die symmetrische Bilinearform

$$(-,-)\colon \mathbf{Z}^{|Q_0|} \times \mathbf{Z}^{|Q_0|} \to \mathbf{Z}$$

auf den Standardbasisvektoren durch

$$(e_i, e_j) := \begin{cases} -d_{ij} & \text{für } i \neq j \\ 2 - 2d_{ii} & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Bei uns gilt zudem $d_{ii} = 0$, da Q keine Schleifen hat.

Wir definieren noch für $x \in \mathbf{Z}^{|Q_0|}$ eine zugehörige quadratische Form durch

$$q(x) = \sum_{i=1}^{|Q_0|} x_i^2 - \sum_{i<j} d_{ij} x_i x_j.$$

Beispiel Sei $Q = (1 — 2 — 3)$. Dann ist $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$. 21.06.2017

Es ist gilt stets $q(x) = \frac{1}{2}(x, x)$ und $(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$.

Ein Vektor $0 \neq x \in \mathbf{Z}^{|Q_0|}$ heißt *positive Wurzel* von q, falls $x_i \geq 0$ und $q(x) = 1$. Die Standardbasisvektoren e_i sind stets Wurzeln von q.

Definiere die Spiegelung an e_i durch

$$\sigma_i \colon \mathbf{Z}^{|Q_0|} \to \mathbf{Z}^{|Q_0|} \colon x \mapsto x - \frac{2(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$$

Da bei uns $(e_i, e_i) = 2$ stets erfüllt ist, vereinfacht sich der Ausdruck rechts zu $x - (x, e_i)e_i$.

Beachte, dass $(-, -)$ im Allgemeinen nicht positiv definit ist, also kein Skalarprodukt definiert.

Bevor wir fortfahren, notieren wir das folgende Korollar zu Theorem 14.6.

14.8 Korollar *Es haben $k\vec{Q}$ und $k\sigma_i\vec{Q}$ gleich viele unzerlegbare Darstellungen, also auch den gleichen Darstellungstyp.*

Wir wollen nun die Funktoren $S_i^+ S_i^-$ bzw. $S_i^- S_i^+$ mit dem Identitätsfunktor vergleichen.

14.9 Lemma

(a) *Sei i eine Senke und X eine Darstellung. Dann existiert ein Morphismus von Darstellungen (genannt Vergleichsmorphismus) $\iota_i \colon S_i^- S_i^+ X \to X$ mit*

$$(\iota_i X)_j = \begin{cases} \mathrm{id}_{X_j} & \textit{für } j \neq i \\ \left[\mathrm{Cokern}\left(\mathrm{Kern}\left(\bigoplus\limits_{\alpha,\, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{\varphi} X_i\right) \hookrightarrow \bigoplus\limits_{\alpha,\, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)}\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow X_i\right] & \textit{für } j = i. \end{cases}$$

Hier haben wir den Isomorphismus $\mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(\varphi)) \simeq \mathrm{Im}(\varphi)$ *genutzt. Es gilt zudem: $\iota_i X$ ist injektiv und* $\mathrm{Cokern}(\iota_i X)$ *ist halbeinfach mit unzerlegbaren Summanden isomorph zu $S(i)$.*

(b) *Sei i eine Quelle und X eine Darstellung. Dann existiert ein Morphismus von Darstellungen (genannt Vergleichsmorphismus) $\pi_i \colon X \to S_i^+ S_i^- X$ mit*

$$(\pi_i X)_j = \begin{cases} \mathrm{id}_{X_j} & \textit{für } j \neq i \\ \left[X_i \xrightarrow{\psi} \mathrm{Im}(\psi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Kern}\left(\bigoplus\limits_{\alpha,\, s(\alpha)=i} X_{t(\alpha)} \to \mathrm{Cokern}\left(X_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus\limits_{\alpha,\, s(\alpha)=i} X_{t(\alpha)}\right)\right)\right] & \textit{für } j = i. \end{cases}$$

Hier haben wir den Isomorphismus $\mathrm{Kern}(\mathrm{Cokern}(\psi)) \simeq \mathrm{Im}(\psi)$ *genutzt. Es gilt zudem: $\pi_i X$ ist surjektiv und* $\mathrm{Kern}(\pi_i X)$ *ist halbeinfach mit unzerlegbaren Summanden isomorph zu $S(i)$.*

Beweis. Die Behauptungen zur Injektivität bzw. zur Surjektivität sind klar. Ebenso ist der Kern bzw. der Cokern nach Definition in i konzentriert, also halbeinfach und der einzige unzerlegbare direkte Summand ist $S(i)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\iota_i X$ und $\pi_i X$ Homomorphismen von Darstellungen sind. Betrachten wir dies für einen Pfeil $\alpha \colon j \to j'$ mit $j, j' \neq i$, so ist die geforderte Kommutativität klar. Für $\iota_i X$ ist i eine Senke, also sei nun $j' = i$. Zu zeigen ist, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} (S_i^- S_i^+ X)_j = X_j \arrow[r, "(S_i^- S_i^+)(\varphi_\alpha)"] \arrow[d, "(\iota_i X)_j = \mathrm{id}_{X_j}"'] & (S_i^- S_i^+ X)_i \arrow[d, "(\iota_i X)_i"] \\ X_j \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & X_i \end{tikzcd}$$

Für $a \in X_j$ zeigt jedoch eine genaue Inspektion der Definition der Spiegelungsfunktoren, dass $(S_i^- S_i^+)(\varphi_\alpha)(a) = \varphi_\alpha(a)$, d.h. das Diagramm kommutiert. $\square$

Nach Lemma 14.9 erhalten wir also exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow S_i^- S_i^+ X \xrightarrow{\iota_i X} X \longrightarrow \operatorname{Cokern}(\iota_i X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern}(\pi_i X) \longrightarrow X \xrightarrow{\pi_i X} S_i^+ S_i^- X \longrightarrow 0.$$

Wir zeige nun, dass diese Sequenzen zerfallen.

14.10 Lemma *Sei X eine Darstellung von $k\vec{Q}$.*

(a) *Sei i eine Senke. Dann gilt $X \simeq S_i^- S_i^+ X \oplus \operatorname{Cokern}(\iota_i X)$. Falls $\operatorname{Cokern}(\iota_i X) = 0$, so gilt $\underline{\dim}(S_i^+ X) = \sigma_i(\underline{\dim}\, X)$. Ist X unzerlegbar, so gilt $X \simeq S_i^- S_i^+ X$ oder $X \simeq S(i)$.*

(b) *Sei i eine Quelle. Dann gilt $X \simeq S_i^+ S_i^- X \oplus \operatorname{Kern}(\pi_i X)$. Falls $\operatorname{Kern}(\pi_i X) = 0$, so gilt $\underline{\dim}(S_i^- X) = \sigma_i(\underline{\dim}\, X)$. Ist X unzerlegbar, so gilt $X \simeq S_i^+ S_i^- X$ oder $X \simeq S(i)$.*

Beweis. Wir zeigen einen Teil der Aussage von (a).

Schreibe $Z := \operatorname{Cokern}(\iota_i X)$. Wir konstruieren einen Morphismus von Darstellungen $\psi\colon Z \to X$ mit $\operatorname{Im}(\psi) \cap S_i^- S_i^+ X = \{0\}$. Dann ist $\operatorname{Im}(\psi) \oplus S_i^- S_i^+ X \subseteq X$, also aus Dimensionsgründen $\operatorname{Im}(\psi) \oplus S_i^- S_i^+ X = X$.

Es ist Z an der Stelle i konzentriert und i ist eine Quelle, d.h. wir können die lineare Abbildung $\psi_i\colon Z_i \to X_i$ beliebig wählen und erhalten einen Morphismus von Darstellungen.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Z_i \arrow[d, "\psi_i"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l] \\
\dots \arrow[r] & X_j \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & X_i & X_j \arrow[l, "\varphi_\beta"'] & \dots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Sei $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha, t(\alpha)=i}$. Dann ist $(S_i^- S_i^+ X)_i = \operatorname{Im}(\varphi)$. Zerlege nun $X_i = \operatorname{Im}(\varphi) \oplus \operatorname{Cokern}(\varphi)$. Dann ist $Z_i \simeq \operatorname{Cokern}(\varphi)$ und wir wählen ψ_i als Inklusion in den Summanden und $\psi_j = 0$ für $j \neq i$. $\square$

14.11 Lemma *Sei i eine Senke und X unzerlegbar. Dann sind äquivalent.*

(a) *$X \not\simeq S(i)$.*

(b) *$S_i^+ X$ ist unzerlegbar (und damit auch nicht 0).*

(c) *$S_i^+ X \neq 0$.*

(d) *$S_i^- S_i^+ X \simeq X$.*

(e) *$\varphi\colon \bigoplus_{\alpha, t(\alpha)=i} X_{s(\alpha)} \to X_i$ ist surjektiv.*

(f) *$\sigma_i(\underline{\dim}\, X) > 0$, d.h. alle Einträge sind nicht negativ und mindestens einer ist positiv.*

(g) *$\underline{\dim}\, S_i^+ X = \sigma_i(\underline{\dim}\, X)$.*

Eine duale Aussage gilt auch für S_i^- mit einer Quelle i.

Beweis. Es impliziert (a) nach den vorherigen Lemmata alle anderen Aussagen, umgekehrt impliziert die Negation von (a) die Negation aller anderen Aussagen. $\square$

14.12 Definition Ein *Dynkindiagramm* ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten in der folgenden Liste enthalten sind.

- $A_n = \overset{1}{\circ} — \overset{2}{\circ} — \cdots \quad \cdots — \overset{n-1}{\circ} — \overset{n}{\circ}$, wobei $n \geq 1$.
- $D_n =$ , wobei $n \geq 4$.

- $E_6 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & & \circ \arrow[d, dash] & & \\ \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \end{tikzcd}$

- $E_7 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & & \circ \arrow[d, dash] & & & \\ \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \end{tikzcd}$

- $E_8 = \begin{tikzcd}[row sep=small] & & \circ \arrow[d, dash] & & & & \\ \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \arrow[r, dash] & \circ \end{tikzcd}.$

14.13 Theorem (Satz von Gabriel, 1972) *Sei $\vec{Q}$ ein zusammenhängender Köcher mit Graph Q und sei k ein Körper. Dann gelten (a) und (b).*

(a) *$k\vec{Q}$ hat endlichen Darstellungstyp genau dann, wenn Q ein Dynkindiagramm ist.*

(b) *Sei Q ein Dynkindiagramm. Dann liefert die Zuordnung $X \mapsto \underline{\dim}\, X$ eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer $k\vec{Q}$-Darstellungen und den positiven Wurzeln der quadratischen Form q.*

Die Aussagen sind unabhängig von der Orientierung der Pfeile im Köcher $\vec{Q}$ und der Wahl des Körpers k.

Gabriel's urspünglicher Beweis verwendete ausschließlich elementare Methoden der linearen Algebra. Später verwendeten Bernstein-Gelfand-Ponomarev in ihrem Beweis die hier eingeführten Spiegelungsfunktoren und zeigten, dass die Spiegelungen σ_i die Weylgruppen erzeugen.

Modultheoretischer Zugang zu Spiegelungsfunktoren

26.06.2017

Grundidee: Definiere Äquivalenzen auf Teilkategorien.

Sei A eine endlich-dimensionale Algebra, S ein einfacher projektiver A-Modul, der nicht injektiv ist. Beispiel: $A = kQ$ und $S(i)$ ist der einfache Modul an einer Senke i.

In diesem Fall existiert $\tau^{-1}S$. Sei $\{P(j) : j = 1, \dots, n\}$ ein Repräsentantensystem von Isomorphieklassen projektiv unzerlegbarerer A-Moduln. Sei $S = S(j)$ der einfache zu $P(j)$. Dann können wir einen Modul T definieren durch

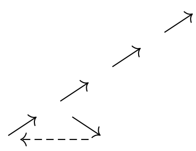
$$T = \tau^{-1}S(i) \oplus \bigoplus_{i \neq j} P(j)$$

und definiere $B := \operatorname{End}_A(T)$. Dann gibt es die AR-Sequenz

$$0 \longrightarrow S(i) \longrightarrow Q \longrightarrow \tau^{-1}S(i) \longrightarrow 0$$

mit Q projektiv (ähnliches Argument wie beim Stricken von AR-Köchern). Da auch $S(i)$ projektiv ist, ist dies zudem eine projektive Auflösung von $\tau^{-1}S(i)$. Da T sonst nur noch projektive Summanden hat, folgt $\operatorname{pdim}(T) = 1$. Der Modul T heißt *Kippmodul*, bzw. *tilting module*.

Beispiel Betrachte den linear orientierten A_4 Köcher. Dann ist $S(1)$ ein projektiver einfacher Modul, der nicht injektiv ist. Der relevante Ausschnitt im AR-Köcher ist



Wir sehen, dass A als Endomorphismenring über die Moduln der linken Seite aus dem linear orientierten A_n-Köcher entsteht, während B aus dem an 1 gespiegelten Köcher entsteht.

Sei nun wie oben T ein Kippmodul. Definiere die folgenden vollen Teilkategorien von A-`mod`.

- Es sei $\mathcal{T}(T)$ die volle Kategorie der $M \in A$-`mod`, für die $\operatorname{Ext}_A^1(T, M) = 0$ gilt.
- Es sei $\mathcal{F}(T)$ die volle Kategorie der $M \in A$-`mod`, für die $\operatorname{Hom}_A(T, M) = 0$ gilt.

Hier stehen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{F}$ für Torsion bzw. torsionsfrei.

Es ist $\operatorname{Hom}_A(T, -): \mathcal{T}(T) \to B$-`mod` exakt, schließlich ist für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{T}(T)$ nach Anwenden von $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(T, X) \longrightarrow \operatorname{Hom}(T, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(T, Z) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(T, X) = 0$$

kurz exakt.

Es ist $\operatorname{Ext}_A^1(T, -): \mathcal{F}(T) \to B$-`mod` exakt, schließlich ist für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

in $\mathcal{F}(T)$ nach Anwenden von $\operatorname{Hom}_A(T, -)$, da alle Hom zu 0 werden, auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(T, X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(T, Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(T, Z) \longrightarrow \operatorname{Ext}^2(T, X) = 0$$

kurz exakt, da $\operatorname{pdim}(T) = 1$.

Sei nun $A = kQ$ wieder eine Wegealgebra eines Köchers. Was ist $\mathcal{T}(T)$ bzw. $\mathcal{F}(T)$ dann?

Für $\mathcal{T}(T)$ ist für ein $M \in A$-`mod`

$$\operatorname{Ext}_A^1(T, M) = \operatorname{Ext}_A^1(\tau^{-1}S(i), M) \oplus \bigoplus_{i \neq j} \underbrace{\operatorname{Ext}_A^1(P(j), M)}_{=0} = \operatorname{Ext}_A^1(\tau^{-1}S(i), M).$$

Mit der Auslander-Reiten Formel wird $\operatorname{Ext}_A^1(\tau^{-1}S(i), M) \simeq D\,\overline{\operatorname{Hom}}(M, S(i))$. Doch da $S(i)$ einfach projektiv ist dies genau dann dann ungleich 0, falls $S(i) \mid M$.

Also bedeutet $M \in \mathcal{T}(T)$, dass $S(i)$ kein direkter Summand von M ist.

Für $\mathcal{F}(T)$ ist für ein $M \in A$-`mod`

$$\operatorname{Hom}_A(T, M) = \operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}S(i), M) \oplus \bigoplus_{i \neq j} \operatorname{Hom}_A(P(j), M).$$

Wegen den letzten Summanden ist dies also 0, falls M keinen Kompositionsfaktor $S(j)$ für $i \neq j$ enthält. Doch wegen $\operatorname{Ext}_A^1(S(i), S(i)) = 0$ besitzt $S(i)$ keine nichttrivialen Erweiterungen, also sind die letzten Summanden 0 für $M = S(i)^n$ für ein $n \in \mathbf{N}$.

Zeige nun: $\operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}S(i), S(i)) = 0$. Wäre dies aber nicht 0, so gäbe es $0 \neq f: \tau^{-1}S(i) \to S(i)$, doch da beide Moduln unzerlegbar sind und $S(i)$ projektiv ist, folgt $S(i) \simeq \tau^{-1}S(i)$. Also ist $\tau^{-1}S(i)$ projektiv, im Widerspruch zur Existenz einer AR-Sequenz mit $\tau^{-1}S(i)$ als Endterm.

Also bedeutet $M \in \mathcal{F}(T)$, dass $M \in \operatorname{add}(S(i))$.

Bemerkung Man kann zeigen, dass auf $\mathcal{T}(T)$ bzw. $\mathcal{F}(T)$ (quasi-)inverse Funktoren zu $\operatorname{Hom}_A(T, -)$ bzw. $\operatorname{Ext}_A^1(T, -)$ durch $T \otimes_B -$ bzw. $\operatorname{Tor}_B^1(T, -)$ gegeben sind.

Die hier skizzierte verallgemeinerte Theorie der Spiegelungsfunktoren geht zurück auf Auslander-Plateck-Reiten und wird auch als APR-Kippen bezeichnet.

15 Komplexe

15.1 Definition Sei R ein Ring, betrachte $\mathcal{C} = R\text{-}\mathtt{Mod}$. Ein *Kettenkomplex* C_* von R-Moduln besteht aus R-Moduln $\{C_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ und R-Modulhomomorphismen $d = d_n\colon C_n \to C_{n-1}$, sodass $d_n d_{n-1} = 0$ (kurz $d^2 = 0$). Die Abbildungen d heißen *Differentiale*.

Wir definieren $Z_n = Z_n(C_*) = \mathrm{Kern}(d_n)$ als Modul der *n-Zykeln* und $B_n = B_n(C_*) = \mathrm{Im}(d_{n+1})$ als Modul der *n-Ränder*. Es gilt $B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$ und wir definieren $H_n = H_n(C_*) = Z_n/B_n$ als *n-te Homologie*.

Ein *Cokettenkomplex* C^* ist analog definiert, hier läuft $d = d^n\colon C^n \to C^{n+1}$ und es gibt *n-Cozykeln* Z^n, *n-Coränder* B^n und die *n-te Cohomologie* $H^n = Z^n/B^n$.

Beispiel
- Eine exakte Sequenz ist ein Komplex mit Homologie 0.
- In der algebraischen Topologie ist die singuläre Homologie die Homologie eines Kettenkomplexes.
- Für eine glatte Mannigfaltigkeit ist in der Differentialgeometrie der de Rham-Komplex definiert als Cokettenkomplex

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots .$$

- Für einen Modul M ist die projektive Auflösung ein Cokettenkomplex.

15.2 Definition Definiere die Kategorie $\mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ der Kettenkomplexen mit Morphismen $u_*\colon C_* \to D_*$ gegeben durch R-Modulhomomorphismen $u_n\colon C_n \to D_n$, sodass für alle $n \in \mathbf{Z}$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle u_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle u_{n-1}} & & \\
\dots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{d_{n-1}} & D_{n-1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Komposition ist gradweise definiert, ebenso die Identität.

Weiterhin sind verschiedene volle Teilkategorien definiert, zum Beispiel $\mathtt{Ch}^{\geq 0}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ bzw. $\mathtt{Ch}^{\leq 0}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ oder auch die Teilkategorie der in beide Richtungen beschränkten Komplexe $\mathtt{Ch}^b(R\text{-}\mathtt{Mod})$.

Ist nun $u_*\colon C_* \to D_*$ ein Morphismus von Komplexen, so ist für $z \in Z_n(C_*)$ nun $zu_nd_n = zd_nu_{n-1} = 0$, also $zu_n \in Z_n(D_*)$. Genauso für B_n, also induziert u einen Morphismus auf den Homologien $H_n(C_*) \to H_n(D_*)$. Wir erhalten einen kovarianten Funktor

$$H_n\colon \mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod}) \to R\text{-}\mathtt{Mod}.$$

15.3 Definition Ein Morphismus $u\colon C_* \to D_*$ heißt *Quasiisomorphismus*, kurz *qis*, falls für alle $n \in \mathbf{Z}$ der induzierte Morphismus $H_n(C_*) \to H_n(D_*)$ ein Isomorphismus ist.

Beispiel Sei M ein R-Modul. Betrachte den in 0 konzentrierten Komplex

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

mit $H_n = 0$ für $n \neq 0$ und $H_n = M$ für $n = 0$ und eine projektive Auflösung von M also Komplex mit $H_n = 0$ für alle $n \in \mathbf{Z}$

$$\dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Dann ist u_* mit $u_n = 0$ für $n \neq 0$ und $u_n = \pi$ ein Quasiisomorphismus zwischen dem Teil der projektiven Auflösung, der aus projektiven Moduln besteht und dem konzentrierten Komplex

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Allerdings ist u_* kein Isomorphismus, zum Beispiel von M nicht projektiv ist.

Beispiel Ein Komplex C_* ist exakt (auch genannt azyklisch) genau dann, wenn die Abbildungen $0_* \to C_*$ und $C_* \to 0_*$ von und in den Nullkomplex Quasiisomorphismen sind.

15.4 Proposition *Es ist* $\mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ *eine abelsche Kategorie.* 28.06.2017

Beweis. Zu $f_*\colon C_* \to D_*$ definiere den Kern als Komplex K_* mit $K_n = \mathrm{Kern}(f_n)$ für $n \in \mathbf{Z}$. Die Differentiale ergeben sich durch die universelle Eigenschaft aus der Forderung, dass die Inklusion $K_n \hookrightarrow C_n$ ein Morphismus von Komplexen wird. Der Cokern ist analog definiert. □

Aus der abelschen Struktur auf $\mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ folgt, dass eine Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

kurz exakt ist genau dann, wenn für alle $n \in \mathbf{Z}$ die Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow C_n \longrightarrow D_n \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

kurz exakt ist. Zeige nun: Eine kurz exakte Sequenz von Komplexen induziert eine lang exakte Sequenz auf den beteiligten Homologie- bzw. Cohomologiemoduln.

15.5 Theorem *Sei*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

eine kurz exakte Sequenz von Komplexen. Dann existieren für alle $n \in \mathbf{Z}$ natürliche Abbildungen $\partial_n\colon H_n(E) \to H_{n-1}(C)$, genannt Verbindungshomomorphismen*, sodass es die folgende lang exakte Sequenz gibt.*

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C) \longrightarrow \dots$$

Eine analoge Aussage gilt für Cokettenkomplexe, mit $\partial_n\colon H^n(E) \to H^{n+1}(C)$.

Zum Beweis benötigen wir das *Schlangenlemma.*

15.6 Lemma (Schlangenlemma) *Sei folgendes kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen gegeben.*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' & \end{tikzcd}$$

Dann gibt es einen Morphismus $\partial\colon \mathrm{Kern}(h) \to \mathrm{Cokern}(f)$, sodass die folgende Sequenz exakt ist.

$$\mathrm{Kern}(f) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathrm{Kern}(g) \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathrm{Kern}(h) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Cokern}(f) \xrightarrow{\bar{\alpha}'} \mathrm{Cokern}(g) \xrightarrow{\bar{\beta}'} \mathrm{Cokern}(h)$$

Ist α mono, so auch $\tilde{\alpha}$ und ist β' epi, so auch $\tilde{\beta}'$.

Es stellt sich die Frage: Wo soll hier die Schlange sein? Die Antwort liefert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "i_f"] & \mathrm{Kern}(g) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "i_g"] & \mathrm{Kern}(h) \arrow[d, "i_h"] \arrow[dddll, dashed, "\partial"] & \\
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "r_f"] & B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "r_g"] & C' \arrow[d, "r_h"] & \\
 & \mathrm{Cokern}(f) \arrow[r, "\bar{\alpha}'"] & \mathrm{Cokern}(g) \arrow[r, "\bar{\beta}'"] & \mathrm{Cokern}(h) &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Zunächst definieren wir die Abbildungsvorschrift $\partial\colon \mathrm{Kern}(h) \to \mathrm{Cokern}(f)$.

Dazu sei $z \in \mathrm{Kern}(h)$. Dann ist $zi_h \in C$. Da β surjektiv ist, können wir $y \in B$ finden mit $zi_h = y\beta$. Dann ist $yg\beta' = y\beta h = zi_h h = 0$, also ist $yg \in \mathrm{Kern}(\beta') = \mathrm{Im}(\alpha')$. Somit gibt es ein eindeutiges Urbild $yg\alpha'^{-1}$, da α' injektiv ist. Wir setzen nun $z\partial := yg\alpha'^{-1}r_f$.

Dabei haben wir bei der Wahl des Urbildes unter β eine Wahl getroffen. Zeige nun, dass unsere Definition von ∂ unabhängig von dieser Wahl ist.

Sei dazu also auch $y' \in B$ mit $zi_h = y'\beta$. Dann ist $(y - y')\beta = 0$, also $y - y' \in \mathrm{Kern}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Somit gibt es $x \in A$ mit $y - y' = x\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned}
yg\alpha'^{-1}r_f = (x\alpha + y')g\alpha'^{-1}r_f &= x\alpha g\alpha'^{-1}r_f + y'g\alpha^{-1}r_f \\
&= xf\alpha'\alpha'^{-1}r_f + y'g\alpha^{-1}r_f = xfr_f + y'g\alpha^{-1}r_f = y'g\alpha^{-1}r_f.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass ∂ wohldefiniert. Bezeichne für $z \in C$ nun $z\beta^{-1}$ irgendein Urbild von z unter β, so ist der Ausdruck

$$z\partial := zi_h\beta^{-1}g\alpha'^{-1}r_f$$

für $z \in \mathrm{Kern}(h)$ wohldefiniert.

Wir habe nun die Exaktheit der Sequenz

$$\mathrm{Kern}(g) \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathrm{Kern}(h) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Cokern}(f) \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathrm{Cokern}(g)$$

an den Stellen $\mathrm{Kern}(h)$ und $\mathrm{Cokern}(f)$ zu zeigen.

An der Stelle $\mathrm{Kern}(h)$ haben wir zu zeigen: $\mathrm{Im}(\tilde{\beta}) = \mathrm{Kern}(\partial)$.

Für $\subseteq$, sei $z = y\tilde{\beta}$ für ein $y \in \mathrm{Kern}(g)$. Dann ist

$$z\partial = y\tilde{\beta}\partial = y\tilde{\beta}i_h\beta^{-1}g\alpha'^{-1}r_f = yi_g\beta\beta^{-1}g\alpha'^{-1}r_f = yi_g g\alpha'^{-1}r_f = 0,$$

also $z \in \mathrm{Kern}(\partial)$.

Für $\supseteq$, sei $\partial(z) = zi_h\beta^{-1}g\alpha'^{-1}r_f0$. Dann ist $zi_h\beta^{-1}g\alpha'^{-1} \in \mathrm{Kern}(r_f) = \mathrm{Im}(f)$, also gibt es $x \in A$ mit $zi_h\beta^{-1}g\alpha'^{-1} = xf$. Somit wird $zi_h\beta^{-1}g = xf\alpha' = x\alpha g$, also $(zi_h\beta^{-1} - x\alpha)i_g^{-1} \in \mathrm{Kern}(g)$. Doch wegen $\tilde{\beta} = i_g\beta i_h^{-1}$ ist

$$(zi_h\beta^{-1} - x\alpha)i_g^{-1}\tilde{\beta} = zi_h\beta^{-1}i_g^{-1}i_g\beta i_h^{-1} - x\alpha i_g^{-1}i_g\beta i_h^{-1} = z - 0 = z.$$

Damit ist $z \in \mathrm{Im}(\tilde{\beta})$.

Die Exaktheit an der Stelle $\mathrm{Cokern}(f)$, sowie die Aussagen in den Fällen α mono bzw. β mono folgen analog. $\square$

Ohne Beweis erwähnen wir ebenso das sogenannte *Fünferlemma.*

Lemma (Fünferlemma) *Sei folgendes Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen gegeben, wobei alle vertikalen Morphismen außer f Isomorphismen sind.*

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & V \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & Z \arrow[d, "\wr"] \\
U' \arrow[r] & V' \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z'
\end{tikzcd}$$

Dann ist auch f ein Isomorphismus.

Beweis von Theorem 15.5. Aus den Voraussetzungen ergibt sich für alle $n \in \mathbf{Z}$ das folgende kommuative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n(C) \arrow[r, "\tilde{f}_n"] \arrow[d] & Z_n(D) \arrow[r, "\tilde{g}_n"] \arrow[d] & Z_n(E) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n"] & D_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & D_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & C_{n-1}/B_{n-1}(C) \arrow[r, "\bar{f}_{n-1}"] & D_{n-1}/B_{n-1}(D) \arrow[r, "\bar{g}_{n-1}"] & E_{n-1}/B_{n-1}(E) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nun ist $B_n(C) \subseteq Z_n(C)$, d.h. d_n induziert einen Morphismus $\bar{d}_n \colon C_n/B_n(C) \to Z_{n-1}(C)$. Der Kern von $\bar{d}_n$ ist dann $Z_n(C)/B_n(C) = H_n(C)$, der Cokern ist $Z_{n-1}(C)/B_{n-1}(C) = H_{n-1}(C)$. Somit ergibt sich das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(C) \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d] & H_n(D) \arrow[r, "H_n(g)"] \arrow[d] & H_n(E) \arrow[d] & \\
 & C_n/B_n(C) \arrow[r, "\bar{f}_n"] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & D_n/B_n(D) \arrow[r, "\bar{g}_n"] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & E_n/B_n(E) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(C) \arrow[r, "\tilde{f}_{n-1}"] \arrow[d] & Z_{n-1}(D) \arrow[r, "\tilde{g}_{n-1}"] \arrow[d] & Z_{n-1}(E) \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(C) \arrow[r, "H_{n-1}(f)"] & H_{n-1}(D) \arrow[r, "H_{n-1}(g)"] & H_{n-1}(E) &
\end{tikzcd}$$

Doch in dieser Situation gibt das Schlangenlemma gerade die gesuchte lang exakte Sequenz

$$H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(D) \xrightarrow{H_{n-1}(g)} H_{n-1}(E)$$

für alle $n \in \mathbf{Z}$. $\square$

Bemerkung Was bedeutet ∂ "natürlich" in Theorem 15.5?

Die kurzen exakten Sequenzen in $\mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ bilden eine Kategorie $\mathcal{S}$. Die Morphismen sind Tripel (f, g, h) von Komplexmorphismen, sodass das folgende Diagramm von Komplexen kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & D \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ebenso definieren die lang exakten Sequenzen von R-Moduln eine Kategorie $\mathcal{L}$. Hier sind die Morphismen Folgen $(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ von R-Modulmorphismen, sodass für alle $n \in \mathbf{Z}$ das folgende Quadrat kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & X_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & X_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & X'_n \arrow[r] & X'_{n+1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Dann sind die Verbindungshomomorphismen natürlich in dem Sinne, dass die Zuordnung in Theorem 15.5, die einer exakten Sequenz von Komplexen ihre lang exakte Homologiesequenz zuordnet, einen Funktor $\mathcal{S} \to \mathcal{L}$ definiert.

Diese Tatsache kann kurz durch folgendes Diagramm dargestellt werden.

$$\begin{tikzcd}
H_*(X) \arrow[rr, "H_*(f)"] & & H_*(Y) \arrow[dl, "H_*(g)"] \\
& H_*(Z) \arrow[ul, squiggly, "\partial"] &
\end{tikzcd}$$

Diese Beobachtung führt zu den sogenannten *triangulierten Kategorien.*

Wir wollen nun projektive Auflösungen untersuchen und diese miteinander vergleichen.

15.7 Definition Seien C und D Komplexe, sowie $f\colon C \to D$, $g\colon C \to D$ und $h\colon C \to D$ Morphismen von Komplexen.

(a) f heißt *nullhomotop*, wenn es eine Folge $s = (s_n\colon C_n \to D_{n+1})_n$ von Morphismen von R-Moduln gibt, sodass $f_n = d_n s_{n-1} + s_n d_{n+1}$ (schreibe kurz $f = ds + sd$).

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dl, "s_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] \\
D_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "d_n"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

(b) g und h heißen *homotop*, falls $g - h$ nullhomotop ist, d.h. falls es $s = (s_n)_n$ wie oben gibt mit $g - h = sd + ds$. In diesem Fall heißt s *Homotopie* zwischen g und h.

(c) f heißt *Homotopieäquivalenz*, falls es einen Morphismus von Komplexen $j\colon D \to C$ gibt, sodass fj homotop zu id_C und jf homotop zu id_D ist.

15.8 Lemma *Seien C und D Komplexe.* 03.07.2017

(a) *Sei $f\colon C \to D$ nullhomotop. Dann ist $H_n(f) = 0$ für alle $n \in \mathbf{Z}$.*

(b) *Sind $f, g\colon C \to D$ zueinander homotop, so ist $H_n(f) = H_n(g)$ für alle $n \in \mathbf{Z}$.*

Beweis. Durch Additivität folgt (b) aus (a), wir zeigen also (a).

Nach Voraussetzung existieren $s_n : C_n \to D_{n+1}$ mit $f_n = d_n s_{n-1} + s_n d_{n+1}$. Sei $x + B_n(C) \in H_n(C)$, also $x \in Z_n(C)$. Dann gilt

$$xf_n = x(d_n s_{n-1} + s_n d_{n+1}) = xd_n s_{n-1} + xs_n d_{n+1} = (xs_n)d_{n+1} \in B_n(C),$$

also ist $(x + B_n(C))H(f) = 0$. $\square$

Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{\mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod})}(C, D)$. Falls $f, g : C \to D$ homotop sind, so sind auch ufv und ugv für $u : C' \to D$ bzw. $v : D \to D'$ homotop.

Damit können wir die Kategorie $\mathcal{K}(R\text{-}\mathtt{Mod})$, die *Homotopiekategorie* der Komplexe in R-Mod als Quotientenkategorie definieren:

- Objekte sind die Objekte in $\mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod})$.
- Morphismen sind die Äquivalenzklassen unter der Homotopierelation zwischen Morphismen von Komplexen.

Die Kategorie $\mathcal{K}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ ist additiv, insbesondere ist der Restklassenfunktor

$$\mathtt{Ch}(R\text{-}\mathtt{Mod}) \to \mathcal{K}(R\text{-}\mathtt{Mod})$$

additiv. Allerdings hat $\mathcal{K}(R\text{-}\mathtt{Mod})$ im Allgemeinen keine abelsche Struktur.

15.9 Theorem (Vergleichssatz für projektive Auflösungen) *Seien X und Y zwei R-Moduln, $f : X \to Y$ ein Homomorphismus und $\varepsilon : P_* \to X$ und $\eta : Q_* \to Y$ projektive Auflösungen. Dann existiert eine Abbildung von Komplexen $f_* : P_* \to Q_*$, die f hochhebt, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ.*

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[d, "f"] \\ Q_0 \arrow[r, "\eta"] & Y \end{tikzcd}$$

Die Abbildung f_* ist eindeutig bis auf Homotopie.

Beweis. Wir zeigen die Existenz von f_* durch induktive Konstruktion.

Für den Induktionsanfang, d.h. f_0, betrachte

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dotted, "\exists f_0"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ Q_0 \arrow[r, "\eta"] & Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Hier existiert $f_0 : P_0 \to Q_0$ mit $f_0\eta = \varepsilon f$, da η surjektiv und P_0 projektiv ist.

Für den Induktionsschritt faktorisiere d_{n+1} über sein Bild $B_{n+1} = Z_n$, da die projektive Auflösung azyklisch ist. Dann schränkt f_n ein zu einer Abbildung $Z_n(P_*) \to Z_n(Q_*)$. Betrachte nun

$$\begin{tikzcd} P_{n+1} \arrow[r, two heads, "d_{n+1}"] \arrow[d, dotted, "\exists f_{n+1}"] & Z_n(P_*) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ Q_{n+1} \arrow[r, two heads, "d_{n+1}"] & Z_n(Q_*) \arrow[r, hook] & P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1}. \end{tikzcd}$$

Hier existiert $f_{n+1} : P_{n+1} \to Q_{n+1}$ mit $f_{n+1}d_{n+1} = d_{n+1}f_n$, da d_{n+1} eingeschränkt auf sein Bild surjektiv ist und P_{n+1} projektiv ist.

Noch zu zeigen: f_* ist eindeutig bis auf Homotopie. Ist auch g_* eine Hochhebung von f, so ist $f_* - g_*$ eine Hochhebung der Nullabbildung $0 : X \to Y$. Es genügt also zu zeigen, dass eine Hochhebung der Nullabbildung h_* nullhomotop ist. Wir konstuieren $s_n : P_n \to Q_{n+1}$ induktiv.

Für $n = 0$ setze $s_{-1} = 0$ und betrachte

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[d, "h_1"] & & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "h_0"] \arrow[dll, dotted, "\exists s_0"'] \arrow[dl, dotted, "\exists h_0"] & X \arrow[d, "0"] \arrow[dl, "0"'] \\
Q_1 \arrow[r, two heads, "d_1"] & \mathrm{Kern}(\eta) \arrow[r, hook] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & Y
\end{tikzcd}$$

Hier existiert $h_0\colon P_0 \to \mathrm{Kern}(\eta)$, da $h_0\eta = \varepsilon 0 = 0$ und $s_0\colon P_0 \to Q_1$ mit $h_0 = s_0 d_1$ existiert, da d_1 eingeschränkt auf $\mathrm{Kern}(\eta)$ surjektiv ist und P_0 projektiv ist.

Für den Induktionsschritt betrachte

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[d, "h_{n+1}"] & & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "h_n"] \arrow[dll, dotted, "\exists s_n"'] \arrow[dl, dotted, "\exists h_n - d_n s_{n-1}"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "h_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] & P_{n-2} \arrow[d, "h_{n-2}"] \\
Q_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & Z_n(Q_*) \arrow[r, hook] & Q_n \arrow[r, "d_n"] & Q_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & Q_{n-2},
\end{tikzcd}$$

Wegen $h_{n-1} = s_{n-1}d_n + d_{n-1}s_{n-2}$ ist

$$\begin{aligned}
(h_n - d_n s_{n-1})d_n = h_n d_n - d_n s_{n-1} d_n &= h_n d_n - d_n(h_{n-1} - d_{n-1}s_{n-2}) \\
&= h_n d_n - d_n h_{n-1} + d_n d_{n-1} s_{n-2} = 0.
\end{aligned}$$

Also faktorisiert $h_n - d_n s_{n-1}$ über $\mathrm{Kern}(d_n) = Z_n(Q_*)$. Da nun d_{n+1} surjektiv auf $Z_n(Q_*)$ abbildet und P_n projektiv ist, folgt die Existenz von $s_n\colon P_n \to Q_{n+1}$ mit $s_n d_{n+1} = h_n - d_n s_{n-1}$. □

Beachte, dass wir die Exaktheit von P_* und die Projektivität der Moduln in Q_* nicht benutzt haben.

15.10 Lemma (Hufeisenlemma) *Sei*

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Moduln. Seien $\varepsilon\colon P_* \to X$ und $\eta\colon Q_* \to Z$ projektive Auflösungen.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
\dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
 & & & Y \arrow[d, "g"] & \\
\dots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dann existiert eine projektive Auflösung $\alpha\colon P_* \oplus Q_* \to Y$, sodass es eine exakte Sequenz von Komplexen gibt

$$0 \longrightarrow P_* \longrightarrow P_* \oplus Q_* \longrightarrow Q_* \longrightarrow 0$$

welche die gegebene exakte Sequenz von Moduln zu einer exakten Sequenz von Komplexen hochhebt.

Beweis. Wir definieren $\alpha\colon P_0 \oplus Q_0 \to Y$. Da g surjektiv ist und Q_0 projektiv, gibt es $\alpha_2\colon Q_0 \to Y$ mit $\alpha_2 y = \eta$.

Setze nun $\alpha = \left(\begin{smallmatrix}\varepsilon f\\ \alpha_2\end{smallmatrix}\right)$. Zusammen mit dem Schlangenlemma angwendet auf die zweite und dritte Spalte ergibt sich damit das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Kern}(\varepsilon) \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Kern}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \oplus Q_0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Kern}(\eta) \arrow[r] \arrow[d] & Q_0 \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Setze die induktive Konstruktion nun analog fort mit $P_1 \twoheadrightarrow \operatorname{Kern}(\varepsilon)$ und $Q_1 \twoheadrightarrow \operatorname{Kern}(\eta)$. □

15.11 Definition Sei $f\colon B \to C$ eine Abbildung von Komplexen. Der *Abbildungskegel* von f ider Komplex $\operatorname{Cone}(f)$, der in Grad n den Eintrage $B_{n-1} \oplus C_n$ hat. Das Differential ist

$$d_n = \begin{pmatrix} -d_{B,n-1} & -f_{n-1} \\ 0 & d_{C,n} \end{pmatrix} : B_{n-1} \oplus C_n \to B_{n-2} \oplus C_{n-1}.$$

Damit gilt für $(b, c) \in B_{n-1} \oplus C_n$ also $(b, c)d_n = (-bd_B, -bf + cd_C)$.

Man erkennt leicht, dass dies ein Komplex ist, d.h. es gilt $d^2 = 0$.

Beispiel Sei $B = C$ und $f = \mathrm{id}$. Dann gilt für das Differential des Kegels

$$d_n = \begin{pmatrix} -d_{B,n-1} & -\mathrm{id} \\ 0 & d_{B,n} \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Cone(id) ist exakt und split, d.h. es gibt $s_n\colon B_n \to B_{n+1}$ mit $d_n s_{n-1} d_n = d_n$ für alle $n \in \mathbf{Z}$.

Sei $(x, y) \in \operatorname{Kern}(d_n)$. Dann ist $(-xd_B, -x + yd_B) = 0$ genau dann, wenn $x = yd_B$, also $(x, y) = (yd_B, y) = (-y, 0)d_{n+1}$, d.h. es gilt $\operatorname{Kern}(d_n) = \operatorname{Im}(d_{n+1})$. Somit ist Cone(id) exakt.

Setze nun

$$s_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} : B_{n-1} \oplus B_n \to B_n \oplus B_{n+1}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -d_{B,n-1} & -\mathrm{id} \\ 0 & d_{B,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d_{B,n-1} & -\mathrm{id} \\ 0 & d_{B,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -d_{B,n} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d_{B,n-1} & -\mathrm{id} \\ 0 & d_{B,n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -d_{B,n-1} & -\mathrm{id} \\ 0 & d_{B,n} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also $dsd = d$.

Für $f = \mathrm{id}$ wird $\operatorname{Cone}(f)$ mit $\operatorname{Cone}(B)$ bezeichnet. Beachte, dass B ein Teilkomplex von $\operatorname{Cone}(B)$ ist.

Ist nun $f\colon B \to C$ gegeben, so ergibt sich die Frage, wann eine Fortsetzung $\hat{f}\colon \operatorname{Cone}(B) \to C$ existiert, d.h. es gilt $(0, b_n)\hat{f}_n = b_n f_n$ für $b_n \in B_n$.

15.12 Proposition *Ein Morphismus von Komplexen $f\colon B \to C$ kann zu $\hat{f}\colon \operatorname{Cone}(B) \to C$ fortgesetzt werden genau dann, wenn f nullhomotop ist.*

Beweis. Sei f_n nullhomotop, d.h. es gibt Abbildungen $s_n \colon B_n \to C_{n+1}$ mit $f_n = d_n s_{n-1} + s_n d_{n+1}$. 05.07.2017
Definiere für $x \in B_{n-1}$ und $y \in B_n$ die Fortsetzung durch

$$(x,y)\hat{f}_n := yf_n - xs_{n-1}.$$

Zeige: Dies definiert eine Komplexabbildung. Sei wieder $(x,y) \in B_{n-1} \oplus B_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(x,y)\hat{f}_n d_n &= (yf - xs_{n-1})d_n \\
&= yf_n d_n - xs_{n-1}d_n \\
&= yd_n f_{n-1} - xf_{n-1} + xd_{n-1}s_{n-2} \\
&= (-xd_{n-1}, -x + yd_n)\hat{f}_n \\
&= (x,y)d_n \hat{f}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Umgekehrt sei $\hat{f}$ eine Fortsetzung von f. Definiere $s_{n-1} \colon B_{n-1} \to C_n$ für $x \in B_{n-1}$ durch

$$xs_{n-1} := -(x,0)\hat{f}_n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
x(d_n s_{n-1} + s_n d_{n+1})\hat{f} &= -(xd_n, 0)\hat{f}_n - (x,0)\hat{f}_{n+1}d_{n+1} \\
&= -(xd_n, 0)\hat{f}_n - (x,0)d_{n+1}\hat{f}_n \\
&= -(xd_n, 0)\hat{f}_n - (-xd_n, -x)\hat{f}_n \\
&= -(0,-x)\hat{f}_n = xf.
\end{aligned}$$

Damit gilt $d_n s_{n-1} + s_n d_{n+1} = f$, also ist f nullhomotop. □

15.13 Proposition *Eine Komplexabbildung $f \colon B \to C$ ist ein Quasiisomorphismus genau dann, wenn* Cone(f) *azyklisch ist.*

Beweis. Es bezeichne $B[-1]$ den Komplex mit $(B[-1])_n = B_{n-1}$ und ebenso verschobenem Differential. Beachte, dass dann auch $H_n(B[-1]) = H_{n-1}(B)$ gilt. Dann gibt es die kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\beta} B[-1] \longrightarrow 0$$

mit $c\alpha = (0,c)$ und $(b,c)\beta = -b$. Dazu gehört die lang exakte Homologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H_{n+1}(\mathrm{Cone}(f)) \longrightarrow H_n(B) \xrightarrow{\partial_n} H_n(C) \longrightarrow H_n(\mathrm{Cone}(f)) \longrightarrow \ldots$$

Damit ist Cone(f) exakt genau dann, wenn ∂_n für alle $n \in \mathbf{Z}$ ein Isomorphismus ist. Aus der Konstruktion von ∂ in diesem Fall folgt aber für $b \in Z_n(B)$

$$\begin{aligned}
(b + B_n(B))\partial_n &= b\beta_{n+1}^{-1}d_{n+1}\alpha_n^{-1} + B_n(C) \\
&= (-b, 0)d_{n+1}\alpha_n^{-1} + B_n(C) \\
&= (bd_n, bf_n)\alpha_n^{-1} + B_n(C) \\
&= bf_n + B_n(C).
\end{aligned}$$

Damit ist $\partial_n = H_n(f)$. Somit ist f ein Quasiisomorphismus genau dann, wenn $H_n(f) = \partial_n$ ein Isomorphismus ist, genau dann, wenn Cone(f) azyklisch ist. □

16 Abgeleitete Funktoren

16.1 Definition Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Eine Familie von kovarianten additiven Funktoren $T_n\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $n \geq 0$, zusammen mit Morphismen $\delta_n\colon T_n(C) \to T_{n-1}(A)$ für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ bildet einen *homologischen δ-Funktor*, wenn die folgenden Bedingungen gelten.

(1) Für jede kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ gibt es eine lang exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow T_{n+1}(C) \xrightarrow{\delta_{n+1}} T_n(A) \longrightarrow T_n(B) \longrightarrow T_n(C) \xrightarrow{\delta_n} T_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

in $\mathcal{B}$, insbesondere ist T_0 rechtsexakt (setze $T_{-1} := 0$).

(2) Für jeden Morphismus

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

von kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{A}$ kommutieren die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
T_n(C') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "T(f)"'] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "T(g)"] \\
T_n(C) \arrow[r, "\delta_n"] & T_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

in $\mathcal{B}$ für alle $n \in \mathbf{Z}$.

Dual dazu definiere einen *cohomologischen δ-Funktor* mit $\delta^n\colon T^n(C) \to T^{n+1}(A)$.

Beispiel
- Der Homologiefunktor $H_*\colon \mathtt{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ist ein homologischer δ-Funktor, ebenso ist der Cohomologiefunktor $H^*\colon \mathtt{Ch}^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ ein cohomologischer δ-Funktor.
- Sei $\mathcal{A} = \mathtt{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Dann definieren für $n \in \mathbf{Z}$ die Zuordnungen $T_0(A) := A/nA$ und $T_1(A) := \{a \in A : na = 0\}$ additive Funktoren $\mathtt{Ab} \to \mathtt{Ab}$.

  Beachte, dass $T_1(A)$ der Kern der Abbildung $A \to A$ ist, welche ein Element a mit n multipliziert. Andererseits ist $T_0(A)$ der Cokern dieser Abbildung. Ist nun $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz abelsche Gruppen, so betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & T_1(B) \arrow[r] \arrow[d] & T_1(C) \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, "\delta_1"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\cdot n"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\cdot n"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\cdot n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & T_0(A) \arrow[r] & T_0(B) \arrow[r] & T_0(C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Mit dem Schlangenlemma folgt also sofort, dass $(T_0, T_1, 0, \dots)$ einen homologischen δ-Funktor bildet.

Seien nun $S, T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwei δ-Funktoren. Ein Morphismus $S \to T$ ist eine Familie von natürlichen Transformationen $\eta_n\colon S_n \to T_n$, die mit den δ_n Morphismen kommutieren, d.h. für eine kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ erhalte folgendes Diagramm, in dem alle Quadrate kommutativ sind.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & S_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_n"] & S_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_n"] & S_n(C) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\eta_n"] & S_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{n-1}"] & S_{n-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{n-1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & T_n(A) \arrow[r] & T_n(B) \arrow[r] & T_n(C) \arrow[r, "\delta_n"] & T_{n-1}(A) \arrow[r] & T_{n-1}(B) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

16.2 Definition Ein homologischer δ-Funktor $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *universell*, falls für alle homologischen δ-Funktoren $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und natürlichen Transformationen $f_0\colon S_0 \to T_0$ es genau einen Morphismus $f\colon S \to T$ von δ-Funktoren gibt, der f_0 fortsetzt.

Dual dazu: Ein cohomologischer δ-Funktor $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *universell*, falls für alle homologischen δ-Funktoren $S\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und natürlichen Transformationen $f_0\colon T^0 \to S^0$ es genau einen Morphismus $f\colon T \to S$ von δ-Funktoren gibt, der f_0 fortsetzt.

Ziel: Wir wollen Ext und Tor als universelle δ-Funktoren definieren.

Beispiel Ist $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein exakter Funktor, so erhalten wir durch $T_0 = F$ und $T_n = 0$ (bzw. $T^0 = F$ und $T^n = 0$) für $n \geq 0$ einen universellen homologischen (bzw. cohomologischen) δ-Funktor, da es zu 0 hin und von 0 weg stets genau einen Morphismus gibt.

Dieses Beispiel motiviert die Idee, für einen rechtsexakten (bzw. linksexakten) Funktor F einen δ-Funktor durch $T_0 = F$ (bzw. $T^0 = F$) zu definieren, wobei die T_n (bzw. T^n) für $n \geq 1$ den Mangel an Exaktheit von F beheben sollen. Dazu wollen wir eine explizite Konstruktion angeben, die projektive bzw. injektive Auflösungen der Objekte benutzt.

Seien also nun $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsch und $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ rechtsexakt (vgl. Tensorprodukt auf Modulkategorien). Es habe $\mathcal{A}$ genügend viele projektive Objekte, d.h. jedes Objekt in $\mathcal{A}$ hat eine projektive Auflösung. Für ein Objekt A in $\mathcal{A}$ wähle eine projektive Auflösung $p_0\colon P_* \to A$ fest und setze für $i \geq 0$

$$(L_i F)(A) := H_i(F(P_*)).$$

Dann heißt $L_i F$ der *i-te linksabgeleitete Funktor* von F.

Aus der Rechtsexaktheit von F folgt, dass $(L_0 F)(A) = H_0(F(P_*)) = F(A)$, also $L_0 F = F$.

16.3 Theorem *Die $L_i F$ bilden einen homologischen δ-Funktor. Die $L_i F$ werden die* linksabgeleiteten *(oder* derivierten*) Funktoren des rechtsexakten Funktors F genannt.* 10.07.2017

Beweis. (a): Wohldefiniertheit: Sei $Q_* \to A$ eine andere projektive Auflösung. Nach dem Vergleichssatz 15.9 gibt es eine Hochhebung $f\colon P_* \to Q_*$ der Identität $\mathrm{id}\colon A \to A$. Nach Lemma 15.8 gilt dann für jede anderen Hochhebung der Identität Gleichheit $H(f) = H(g)$ auf der Homologie.

Genauso existiert $h\colon Q_* \to P_*$ als Hochhebung der Identität $\mathrm{id}\colon A \to A$. Dann hebt auch $fh\colon P_* \to P_*$ die Identität $\mathrm{id}\colon A \to A$ hoch. Aber auch id_P hebt diese hoch. Es folgt, dass $H(f)$ und $H(h)$ Isomorphismen auf der Homologie sind.

(b): Die $L_i F$ sind additive Funktoren. Sei $f\colon A_1 \to A_2$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine Hochhebung $f\colon P_*(A_1) \to P_*(A_2)$, eindeutig bis auf Homologie. Definiere nun $(L_i F)(f)$ durch den von f induzierten Morphismus $H_i(F(P_*(A_1))) \to H_i(F(P_*(A_2)))$. Dieser ist nun unabhängig von der gewählten Hochhebung.

Insbesondere ist der Morphismus $(L_0F)(A_1) \to (L_0F)(A_2)$ genau durch das ursprüngliche f gegeben. Damit definiert ist L_iF ein additiver Funktor.

(c): Die L_iF bilden einen homologischen δ-Funktor.

Sei eine kurz exakte Sequenz $0 \to A' \to A \to A'' \to A$ in $\mathcal{A}$ gegeben. Wähle projektive Auflösungen $P'_* \to A'$ und $P''_* \to A''$. Nach dem Hufeisenlemma 15.10 gibt es eine projektive Auflösung $P_* \to A$, sodass es die exakte Sequenz $0 \to P'_* \to P_* \to P''_* \to 0$ von Komplexen gibt, welche $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ hochhebt, d.h. es ist $0 \to P'_n \to P_n \to P''_n \to 0$ exakt ist in $\mathcal{A}$ für alle n. Da P''_n projektiv ist, zerfällt diese Sequenz. Nun ist F zwar nur rechtsexakt, aber auf zerfallende Sequenzen exakt, wie jeder Funktor. Damit ist für alle n die Sequenz $0 \to F(P'_n) \to F(P_n) \to F(P''_n) \to 0$ exakt in $\mathcal{B}$. Über die lang exakte Homologiesequenz folgt die Existenz der Verbindungshomomorphismen ∂

$$\ldots \to (L_{i+1}F)(A'') \xrightarrow{\partial} (L_iF)(A') \to (L_iF)(A) \to (L_iF)(A'') \xrightarrow{\partial} (L_{i-1}F)(A') \to \ldots$$

Damit ist die Bedingung (1) in der Definition der homologischen δ-Funktoren verifiziert.

Damit ist noch Bedingung (2) zu zeigen: Die Verbindungshomomorphismen sind natürlich. Dazu sei ein Morphismus von kurz exakten Sequenzen gegeben

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r, "\pi_B"] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit projektiven Auflösungen $\varepsilon'\colon P'_* \to A'$, $\varepsilon''\colon P''_* \to A''$, $\eta'\colon Q'_* \to B'$ und $\eta''\colon Q''_* \to B''$. Nach dem Hufeisenlemma gibt es $\varepsilon\colon P_* \to A$ und $\eta\colon Q_* \to B$. Dabei ist ε eingeschränkt auf P'_* genau ε' und auf dem Quotienten P_*/P'_* genau ε'', ebenso für η.

Wir heben nun f' und f'' zu Abbildungen zwischen Kettenkomplexen hoch, $\hat{f}'\colon P'_* \to Q'_*$ und $\hat{f}''\colon P''_* \to Q''_*$. Wir können f nicht beliebig zu $\hat{f}$ hochheben, sondern müssen die Hochhebung so wählen, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P'_* \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}'"] & P_* \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}"] & P''_* \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q'_* \arrow[r] & Q_* \arrow[r] & Q''_* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wenn das erreicht ist, so folgt Bedingung (2) aus der Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus im Schlangenlemmas.

Zur Konstruktion von $\hat{f}$: Die Komplexe P_* und Q_* haben Terme gegeben durch $P'_n \oplus P''_n$ und $Q'_n \oplus Q''_n$. Damit muss $\hat{f}$ aus Matrizen der Form

$$\hat{f}_n = \begin{pmatrix} \hat{f}' & 0 \\ \gamma_n & \hat{f}'' \end{pmatrix}$$

bestehen, mit $\gamma_n\colon P''_n \to Q'_n$, schließlich darf auf Grund der geforderten Einschränkung nichts von P'_n nach Q''_n abgebildet werden.

Finde nun γ_n so, dass $\hat{f}$ eine Komplexabbildung wird, die f fortsetzt. Wir definieren ein solches γ_n induktiv.

Für γ_0 ist das Differential 0, d.h. es spielt nur die Hochhebung von f eine Rolle. Es muss $\hat{f}\eta = \varepsilon f$ gelten.

$$\begin{tikzcd}
P_0 = P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\hat{f}"] & A \arrow[d, "f"] \\
Q_0 = Q'_0 \oplus Q''_0 \arrow[r, "\eta"] & B
\end{tikzcd}$$

Auf P'_0 gilt $\hat{f}'_0\eta' = \varepsilon' f'$, da η auf Q'_0 zu η', ε auf P'_0 zu ε' und f auf A' zu f' einschränkt. Wir erhalten keine Einschränkung an γ_0.

Auf P''_0 gilt $\gamma_0\eta' = \varepsilon'' f - \hat{f}''_0\eta$. Sei $\beta := \varepsilon'' f - \hat{f}''_0\eta\colon P''_0 \to B$. Behauptung: β bildet nach $B' = \operatorname{Kern}(\pi_B)$ ab. Dazu wird

$$\beta\pi_B = \varepsilon'' f\pi_B - \hat{f}''_0\eta\pi_B = \varepsilon'' f'' - \hat{f}''_0\eta'' = 0,$$

da $\hat{f}''_0$ die Hochhebung von f'' ist. Damit erhalten wir das gesuchte γ_0 mit $\gamma_0\eta' = \beta$ aus der Projektivität von P''_0

$$\begin{tikzcd} & P''_0 \arrow[dl, "\exists\gamma_0"'] \arrow[d, "\beta"] & \\ Q'_0 \arrow[r, "\eta'"] & B' \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Für γ_n mit $n \geq 1$ seien die Differentiale auf P_* und Q_* als Matrizen gegeben durch

$$d_P = \begin{pmatrix} d'_P & 0 \\ \lambda_P & d''_P \end{pmatrix} \text{ und } d_Q = \begin{pmatrix} d'_Q & 0 \\ \lambda_Q & d''_Q \end{pmatrix},$$

wobei d'_P das Differential auf P'_* und so weiter, und $\lambda_P\colon P'' \to P'$ Morphismen für jedes n sind, ebenso für Q. Nun muss γ_n so gewählt werden, dass die Komplexbedingung $d_p\hat{f} = \hat{d}_Q$ erfüllt ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} d\hat{f} - \hat{f}d &= \begin{pmatrix} d'_P & 0 \\ \lambda_P & d''_P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{f}' & 0 \\ \gamma & \hat{f}'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{f}' & 0 \\ \gamma & \hat{f}'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d'_P & 0 \\ \lambda_P & d''_P \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d'_P\hat{f}' & 0 \\ \lambda_P\hat{f}' + d''_P\gamma & d''_P\hat{f}'' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{f}'d'_Q & 0 \\ \gamma d'_Q + \hat{f}''\lambda_Q & \hat{f}''d''_Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_P\hat{f}' + d''_P\gamma - \gamma d'_Q - \hat{f}''\lambda_Q & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit muss $\gamma_n d'_Q = \lambda_P\hat{f}' + d''_P\gamma_{n-1} - \hat{f}''\lambda_Q$ gelten. Die rechte Seite ist nach Induktion bereits festgelegt, definiere diese Seite also als $\alpha := \lambda_P\hat{f}' + d''_P\gamma_{n-1} - \hat{f}''\lambda_Q$. Nachrechnen liefert $\alpha d'_Q = 0$, also liegt das Bild von α im Kern von d'_{n-1}, also im Bild von d'_n, da der Komplex Q' exakt ist. Somit folgt die Existenz von γ_n aus der Projektivität von P''_n.

$$\begin{tikzcd} & P''_n \arrow[dl, "\exists\gamma_n"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ Q'_n \arrow[r, "d'"] & d'(Q'_n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dieses γ_n erfüllt $\gamma_n d' = \alpha$, also ist $\hat{f}$ nach Induktion damit ein Kettenmorphismus. □

Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechtsexakter Funktor und habe $\mathcal{A}$ genügend viele projektive Objekte. Ein Objekt X heißt *F-azyklisch*, falls $L_iF(X) = 0$ für alle $i \neq 0$. Wir haben gezeigt: Projektive Objekte sind stets F-azyklisch. Für spezielle F kann es mehr azyklische Objekte, zum Beispielen flache Moduln für Tensorfunktoren. 12.07.2017

16.4 Theorem *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen projektiven Objekten. Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechtsexakter Funktor. Dann bilden die abgeleiteten Funktoren L_iF einen universellen δ-Funktor.*

Beweis. Sei auch T_* ein homologischer δ-Funktor zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und $\varphi_0\colon T_0 \to F = L_0F$ ein Morphismus, d.h. eine natürliche Transformation. Zeige: Es gibt eine eindeutige Fortsetzung $\varphi_*\colon T_* \to L_*F$ als Morphismus von δ-Funktoren.

Wir konstruieren diese Fortsetzung durch Induktion nach n, wobei φ_0 ja bereits gegeben ist. Nach Induktionsannahme seien für $0 \leq i \leq n$ die Transformationen φ_i bereits definiert, d.h. die entsprechenden Diagramme mit den δ_i kommutieren.

Sei A ein Objekt in $\mathcal{A}$. Sei $0 \to K \to P \to A \to 0$ exakt mit P projektiv. Dann gibt es das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
 & T_n(A) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, dotted, "\exists\varphi_n"] & T_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & T_{n-1}(P) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\
0 = L_nF(P) \arrow[r] & L_nF(A) \arrow[r, "\delta_n"] & L_{n-1}F(K) \arrow[r] & L_{n-1}F(P)
\end{tikzcd}$$

Hier existiert φ_n eindeutig durch die universelle Eigenschaft des Kerns.

Zeige nun: $\varphi_n\colon T_n \to L_nF$ ist eine natürliche Transformation. Dazu sei $f\colon A' \to A$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$, $0 \to K' \to P' \to A' \to 0$ exakt mit P' projektiv. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists h"] & P' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists g"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & P \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Hier existiert g, da P projektiv ist und h durch die universelle Eigenschaft des Kerns. Nun betrachte das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
T_n(A') \arrow[rrr, "T_n(f)"] \arrow[dr, "\delta_n"] \arrow[ddd, "\varphi_n(A')"'] & & & T_n(A) \arrow[dl, "\delta_n"'] \arrow[ddd, "\varphi_n(A)"] \\
 & T_{n-1}(K') \arrow[r, "T_{n-1}(h)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & T_{n-1}(K) \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \\
 & L_{n-1}F(K') \arrow[r, "L_{n-1}F(h)"] & L_{n-1}F(K) & \\
L_nF(A') \arrow[rrr, "L_nF(f)"] \arrow[ur, "\delta_n"] & & & L_nF(A) \arrow[ul, "\delta_n"']
\end{tikzcd}$$

Das linke und das rechte Trapez kommutiert nach Konstruktion von φ_n. Das obere und das untere Trapez kommutiert nach Definition eines homologischen δ-Funktors. Das innere Rechteck kommutiert nach Induktion. Damit ergibt sich unter Ausnutzung dieser Kommutativitäten.

$$\begin{aligned}
\varphi_n L_nF(f)\delta_n = \varphi_n\delta_n L_{n-1}F(h) &= \delta_n\varphi_{n-1}L_{n-1}F(h) \\
&= \delta_n T_{n-1}(h)\varphi_{n-1} = T_n(f)\delta_n\varphi_{n-1} = T_n(f)\varphi_n\delta_n
\end{aligned}$$

Allerdings steht δ_n in einer exakten Sequenz

$$0 = L_nF(P) \longrightarrow L_nF(A) \xrightarrow{\delta_n} L_{n-1}F(K),$$

da P projektiv ist. Damit ist δ_n injektiv, d.h. es folgt $\varphi_n L_nF(f) = T_n(f)\delta_n$. Damit ist φ_n natürlich.

Wählt man nun speziell $A = A'$ und $f = \mathrm{id}$, allerdings verschiedene projektive P bzw. P', so ergibt sich hier $\varphi_n^P = \varphi_n^{P'}$, d.h. das φ_n ist unabhängig von dem gewähltem projektiven P.

Noch zu zeigen: Die φ_n und die δ_n kommutieren. Datz sei $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ exakt in $\mathcal{A}$. Sei auch $0 \to K'' \to P'' \to A'' \to 0$ exakt mit P'' projektiv. Es ergibt sich das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists g"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{$*$}$$

da für f das Objekt P'' projektiv ist und für g wieder über die universelle Eigenschaft des Kerns. Außerdem erhalten wir mit der Konstruktion von φ_n und der Natürlichkeit das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_n(A'') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] & T_{n-1}(K'') \arrow[r, "T_{n-1}(g)"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & T_{n-1}(A') \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ L_nF(A'') \arrow[r, "\delta_n"] & L_{n-1}F(K'') \arrow[r, "L_{n-1}F(g)"] & L_{n-1}F(A') \end{tikzcd} \tag{$**$}$$

Aus $(*)$ folgt mit Eigenschaft (2) des homologischen δ-Funktors T_* die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} T_n(A'') \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & T_{n-1}(K'') \arrow[d, "T_{n-1}(g)"] \\ T_n(A'') \arrow[r, "\delta_n"] & T_{n-1}(A'), \end{tikzcd}$$

also $\delta_n T_{n-1}(g) = \delta_n$, ebenso für L_*F die Gleichung $\delta_n L_{n-1}F(g) = \delta_n$. Doch damit impliziert $(**)$ die gewünschten Kommutativitäten. $\square$

Analoge Sätze gelten auch für die rechtsabgeleiten Funktoren linksexakter Funktoren, aber mit injektiven anstatt projektiven Objekten. Insbesondere muss die abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ hier genügend viele injektive Objekte besitzen.

Durch den Übergang zur entgegengesetzten Kategorie ist auch der Fall von kontravarianten Funktoren behandelt.

16.5 Proposition *Seien $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ adjungierte Funktoren, d.h. $L \dashv R$.*

Dann ist L rechtsexakt und R linksexakt.

Beweis. Wir zeigen, dass R linksexakt ist, die Aussage für L folgt dual.

Sei $0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$ exakt in $\mathcal{B}$. Sei $A \in \mathcal{A}$, d.h. $L(A) \in \mathcal{B}$. Wende den linksexakten Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), -)$ auf die exakte Sequenz an und erhalte unter Ausnutzung des natürlichen Isomorphismus der Adjunktion das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B_3) \arrow[d, "\wr"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B_1)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B_2)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B_3)) \end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist exakt für alle $A \in \mathcal{A}$, d.h. auch die Sequenz $0 \to R(B_1) \to R(B_2) \to R(B_3)$ ist exakt in $\mathcal{A}$. Damit ist R linksexakt. $\square$

Die Funktoren Ext^n und Tor_n können (bis auf Isomorphie) definiert werden durch Ableiten von Hom oder $\otimes$. Alternativ können die Funktoren auch axiomatisch eingeführt werden.

Sei im Folgenden R ein Ring und M ein R-Linksmodul.

16.6 Proposition (Axiome für Tor) *Die Funktoren* $T_n := \mathrm{Tor}_n^R(-, M)$ *sind bis auf natürlichen Isomorphismus eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaften* (1-3)*.*

(1) $T_0 = - \otimes_R M$.

(2) $T_n(P) = 0$ *für* $n \geq 1$ *und* P *projektiv.*

(3) *Für jede exakte Sequenz* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *von* R*-Rechtsmoduln gibt es eine lang exakte Sequenz mit natürlichen Verbindungshomomorphismen* δ_n

$$\ldots \longrightarrow T_{n+1}(Z) \xrightarrow{\delta_{n+1}} T_n(X) \longrightarrow T_n(Y) \longrightarrow T_n(Z) \xrightarrow{\delta_n} T_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

Beweis. Vergleiche (1-3) hier mit dem universellen δ-Funktor gegeben durch $L_* T_0$, siehe auch die vorherigen Beweise. □

Bemerkung Es stellt sich die unangenehme Frage, ob $\mathrm{Ext}^n(X, -)(Y) \simeq \mathrm{Ext}^n(-, Y)(X)$ gilt, ebensor für Tor_n. Die Antwort ist (glücklicherweise) ja, jedoch ist das Aufschreiben eines Beweis lang und damit lästig.

16.7 Proposition (Axiome für Ext) *Die Funktoren* $F^n = \mathrm{Ext}_R^n(M, -)$ *sind bis auf natürlichen Isomorphismus eindeutig charakterisiert durch die Eigenschaften* (1-3)*.* 17.07.2017

(1) $F^0 = \mathrm{Hom}_R(M, -)$.

(2) $F^n(I) = 0$ *für* $n \geq 1$ *und* I *injektiv.*

(3) *Für jede exakte Sequenz* $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ *von* R*-Linksmoduln gibt es eine lang exakte Sequenz mit natürlichen Verbindungshomomorphismen* δ_n

$$\ldots \longrightarrow F^{n-1}(Z) \xrightarrow{\delta^{n-1}} F^n(X) \longrightarrow F^n(Y) \longrightarrow F^n(Z) \xrightarrow{\delta^n} F^{n+1}(X) \longrightarrow \ldots$$

17 Derivierte Kategorien

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $\mathtt{Ch}(\mathcal{A})$ die Kategorie der Komplexe in $\mathcal{A}$. Wir können ein Objekt $M \in \mathcal{A}$ als Komplex konzentriert im Grad 0 auffassen. Seien $\varepsilon\colon P_* \to M$ und $\eta\colon Q_* \to M$ zwei projektive Auflösungen von M, d.h. P_* und Q_* sind Komplexe mit $P_k = Q_k = 0$ für $k < 0$ und ε und η sind Quasiisomorphismen.

In diesem Fall induziert die Identität auf M eine Homotopieäquivalenz zwischen P_* und Q_*, die Komplexe sind isomorph in der Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Jedoch sind P_* und Q_* nicht isomorph zu M in der Homotopiekategorie: Der Quasiisomorphismus ε induziert zwar einen Morphismus $P_* \to M$ in der Homotopiekategorie, im Allgemeinen existiert allerdings kein Morphismus in die umgekehrte Richtung $M \to P_*$.

Daher erweitern wir die Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ zur *derivierten Kategorie* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, in der alle Quasiisomorphismen invertierbar sind. Die Methode dazu ist das sogenannte Bruchrechnen, analog zur Erweiterung $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ der ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen. Für Kategorien geht eine solche Konstruktion zurück auf Gabriel-Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory.*

17.1 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine Klasse von Morphismen. Eine *Lokalisierung* von $\mathcal{C}$ bezüglich S ist eine Kategorie $\mathcal{D} = S^{-1}\mathcal{C}$ mit einem Funktor $Q\colon \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$, sodass (1-2) gilt.

(1) Für $s \in S$ ist $Q(s)$ ein Isomorphismus in $S^{-1}\mathcal{C}$.

(2) Für alle Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, für die $F(s)$ ein Isomorphismus ist für alle $s \in S$ gibt es genau einen Funktor $\hat{F}\colon \mathcal{C}' \to S^{-1}\mathcal{C}$ mit $F = \hat{F} \circ Q$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{C}' \\ S^{-1}\mathcal{C} \arrow[ur, dotted, "\exists!\hat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Die Lokalisierung $S^{-1}\mathcal{C}$ ist eindeutig bis auf natürliche Äquivalenz, falls sie existiert.

17.2 Definition Eine Klasse S von Morphismen in $\mathcal{C}$ heißt *multiplikatives System* in $\mathcal{C}$, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Sind $s, t \in S$ komponierbar, so ist auch $st \in S$, d.h. S ist abgeschlossen unter Multiplikation.

(2) (Ore-Bedingung) Sei $t\colon Z \to Y$ in S. Dann gibt es für alle $g\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "s"] & Z \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

mit $s \in S$.

(3) (Kürzungsregel) Seien $f, g\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$. Dann sind äquivalent

(a) Es gibt ein $s \in S$ mit $fs = gs$.

(b) Es gibt ein $t \in S$ mit $tf = tg$.

Beispiel Wir betrachten die ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$ als Kategorie mit einem Objekt und Morphismen $\mathrm{Mor}(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, Komposition ist die Multiplikation von ganzen Zahlen.

Sei $S := \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist S ein multiplikatives System in $\mathbf{Z}$. Hier bilden die rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ bilden die Lokalisierung $S^{-1}\mathbf{Z}$ von $\mathbf{Z}$ an S.

Bemerkung (Konstruktion von $S^{-1}\mathcal{C}$) Sei S ein multiplikatives System in einer Kategorie $\mathcal{C}$.

Sei $S \ni s\colon X_1 \to X$ und $f\colon X_1 \to Y$ ein beliebiger Morphismus in $\mathcal{C}$. Dann ist

$$X \xleftarrow{s} X_1 \xrightarrow{f} Y$$

ein *Linksbruch* $s^{-1}f\colon X \to Y$.

Analog ist für $S \ni t\colon Y_1 \to Y$ und $g\colon X \to Y_1$ beliebig

$$X \xrightarrow{g} Y_1 \xleftarrow{t} Y$$

ein *Rechtsbruch* $gt^{-1}\colon X \to Y$.

Zwei Linksbrüche $s^{-1}f\colon X \leftarrow X_1 \to Y$ und $t^{-1}g\colon X \leftarrow X_1 \to Y$ heißen *äquivalent*, falls es einen Linksbruch $r^{-1}h\colon X \leftarrow X_3 \to Y$ und Morphismen $\alpha\colon X_3 \to X_1$ und $\beta\colon X_3 \to X_2$ gibt , sodass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & X_3 \arrow[l, "r"'] \arrow[r, "h"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \\
 & X_2 \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Axiome für ein multiplikatives System garantieren nun, dass dies eine Äquivalenzrelation ist, welche mit der Komposition von Brüchen verträglich ist (siehe unten für die Definition der Komposition von Brüchen).

Dann kann $S^{-1}\mathcal{C}$ definiert werden als Kategorie mit den gleichen Objekten wie $\mathcal{C}$, jedoch mit Äquivalenzklassen von Brüchen als Morphismen. Der Lokalisierungsfunktor schickt dann einen Morphismus $f\colon X \to Y$ auf den Bruch $\mathrm{id}^{-1} f\colon X \to Y$.

Damit ist, bis auf mengentheoretische Probleme, die Existenz der Lokalisierung $S^{-1}\mathcal{C}$ behandelt. Mit sogenannten *Modellkategorien* lässt sich in gewissen Spezialfällen dieses mengentheoretische Problem lösen.

Bemerkung (Multiplikation von Brüchen) Seien zwei Brüche in $S^{-1}\mathcal{C}$ gegeben, repräsentiert durch

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & & Y_1 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & Y & & Z.
\end{tikzcd}$$

Nach der Ore-Bedingung gibt es einen (nicht eindeutigen) Bruch

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & \\
X_1 & & Y_1
\end{tikzcd}$$

sodass das folgende Quadrat kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"] & Y_1 \arrow[d, "t"] \\
X_1 \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Doch für jede Wahl von r und h sind die zusammengesetzten Brüche

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & X_1 \arrow[dl, "s"'] & & Y_1 \arrow[dr, "g"] & \\ X & & & & Z \end{tikzcd}$$

alle äquivalent zueinander, d.h. dies definiert eine Multiplikation in $S^{-1}\mathcal{C}$.

Ist $\mathcal{C}$ additiv, so ist auch $S^{-1}\mathcal{C}$ additiv.

Wir kommen nun zurück zu unserem motivierendem Beispiel. Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, so bilden die Quasiisomorphismen ein multiplikatives System auf $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

17.3 Definition Die *derivierte Kategorie* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ist die Lokalisierung der Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ am multiplikativen System der Quasiisomorphismen.

Auch die Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ ist eine Lokalisierung: Sie ist die Lokalisierung von $\mathtt{Ch}(\mathcal{A})$ am multiplikativen System der Homotopieäquivalenzen.

17.4 Theorem *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.*

(a) *Besitzt $\mathcal{A}$ genügend viele injektive Objekte, so gibt es eine Äquivalenz $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{K}^+(\mathcal{A}\text{-}\mathtt{Inj})$.*

(b) *Besitzt $\mathcal{A}$ genügend viele projektive Objekte, so gibt es eine Äquivalenz $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \simeq \mathcal{K}^-(\mathcal{A}\text{-}\mathtt{Proj})$.*

Beide Äquivalenzen sind Äquivalenzen von triangulierten Kategorien.

17.5 Lemma *Sei Y ein nach unten beschränkter Komplex mit injektiven Termen, Z irgendein Komplex und $t\colon Y \to Z$ ein Quasiisomorphismus. Dann ist t in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Inklusion eines direkten Summanden.*

Beweis. Nach Proposition 15.13 gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cone}(t) \xrightarrow{\beta} Y[-1] \longrightarrow 0$$

mit dem azyklischen Kegel $\mathrm{Cone}(t)$. Da Y nach unten beschränkt ist und injektive Einträge hat, ist β nullhomotop.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Damit gibt es eine Homotopie $v\colon \mathrm{Cone}(t) \to Y$ mit $\beta = vd + dv$.

Sei nun $v = (\gamma, s)\colon Y[-1] \oplus Z = \mathrm{Cone}(t) \to Y$ mit Morphismen $\gamma\colon Y[-1] \to Y$ und $s\colon Z \to Y$. 19.07.2017

Ist nun $(y, z) \in Y[-1] \oplus Z$ in einem Grad n, so gilt

$$\begin{aligned} -y = (y,z)\beta &= (y,z)(vd + dv) \\ &= (y\gamma + zs)d + (yd, -yt - zd)v \\ &= y\gamma d + zsd + yd\gamma - yts - zds. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt für $y = 0$, dass $zsd = zds$ für alle $z \in Z$. Damit ist s ein Kettenmorphismus. Für $z = 0$ folgt dagegen $yts - y = y\gamma d + yd\gamma$, d.h. ts ist homotop zur Identität. Damit ist t split mono in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. □

17.6 Lemma *Sei X ein Komplex, I ein nach unten beschränkter Komplex mit injektiven Einträgen und P ein nach oben beschränkter Komplex mit projektiven Einträgen. Dann gelten*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X,I) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X,I) \quad \textit{und} \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P,X) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(P,X)$$

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage.

In $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ist ein Morphismus $X \to I$ repräsentiert durch einen Bruch $gt^{-1}\colon X \to Z \leftarrow I$ in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, wobei t ein Quasiisomorphismus ist. Nach Lemma 17.5 gibt es $s\colon Z \to I$, sodass $ts = \mathrm{id}$ in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ wird. Setze nun

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X,I) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X,I) \\ gt^{-1} & \longmapsto & gs \\ h\,\mathrm{id}^{-1} & \longleftarrow\!\shortmid & h \end{array}$$

Es genügt Wohldefiniertheit der Abbildung nach rechts zu zeigen. Dazu zeige zuerst, dass in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ die Brüche gt^{-1} und $gs\,\mathrm{id}^{-1}$ äquivalent sind. Doch dies folgt aus der Kommutativität des folgendes Diagramms.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "s"] & \\ X \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "gs"] \arrow[dr, "gs"'] & I & I \arrow[ul, "t"'] \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & I \arrow[u, "\mathrm{id}"] & \end{tikzcd}$$

Als nächstes zeige, dass aus der Äquivalenz von $gs\,\mathrm{id}^{-1}$ und $f\,\mathrm{id}^{-1}$ mit $f\colon X \to I$ in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ beliebig stets $f = gs$ folgt. Dazu betrachte das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[d, "\alpha"] & \\ X \arrow[ur, "gs"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & W & I \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[l, "r"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & I \arrow[u, "\beta"] & \end{tikzcd}$$

Doch dann ist $\alpha = \beta = r$ und es gilt $gsr = fr$ mit dem Quasiisomorphismus $r\colon I \to W$. Nach Lemma 17.5 ist r split mono, d.h. es folgt $gs = f$. $\square$

Beweisskizze zu Theorem 17.4. Es müssen im Wesentlichen noch zwei Aussagen gezeigt werden.

(1) Die Isomorphismen in $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ sind genau die Quasiisomorphismen.

Dies folgt aus Lemma 17.5: Ist $t\colon Y \to Z$ ein Quasiisomorphismus in $\mathcal{K}^+(\mathcal{A}\texttt{-Inj})$, so gibt es ein s mit $\mathrm{id} = ts$. Umgekehrt gibt es durch Vertauschen der Rollen von Y und Z (da auch s Quasiisomorphismus ist) ein u mit $\mathrm{id} = su$. Damit ist s split mono und split epi, also ein Isomorphismus.

(2) Alle Objekte in $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ sind isomorph zu Objekten in $\mathcal{K}^+(\mathcal{A}\texttt{-Inj})$.

Benutze allgemeine injektive Auflösungen für Objekte in $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$, die sogenannten *Cartan-Eilenberg-Auflösungen.* $\square$

Bemerkung (Abgeleitete Funktoren zwischen derivierten Kategorien) Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter und $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein rechtsexakter Funktor zwischen abelschen Katgorien.

Dann existieren unter gewissen Zusatzvoraussetzungen die abgeleiteten Funktoren auch zwischen den derivierten Kategorien, d.h. es gibt

$$\mathbb{R}F\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbb{R}_iF(X) = H_i(F(X))$$

und

$$\mathbb{L}G\colon \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbb{L}_i G(X) = H_i(G(X))$$

Beispiele sind $\mathbb{R}\operatorname{Hom}$ und $\mathbb{L}\otimes$.

Beispiel (Konkretes Beispiel einer derivierten Kategorie) Sei A erblich, $P_* \in \mathcal{K}^{\mathrm{b}}(A\text{-}\mathtt{proj})$ ein beschränkter Komplex mit endlich erzeugt projektiven Einträgen. Ohne Einschränkung sei $P_j = 0$ für $j < 0$.

Da A erblich, ist das Bild $d_1(P_1) \subseteq P_0$ auch endlich erzeugt projektiv. Damit ist $d_1\colon P_1 \twoheadrightarrow d_1(P_1)$ split epi, d.h. $P_1 \simeq d_1(P_1) \oplus P_1'$ mit $d_1(P_1') = 0$. Somit ist der Komplex P_* isomorph zur direkten Summe der Komplexe

$$0 \longrightarrow d_1(P_1) \hookrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

$$\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1' \longrightarrow 0$$

Führen wir diesen Prozess induktiv fort, so ist, da P_* beschränkt ist, der Komplex P_* eine endliche direkte Summe von Komplexen der Form

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \quad \text{oder} \quad 0 \longrightarrow P \hookrightarrow Q \longrightarrow 0$$

mit P und Q projektiv endlich erzeugt. Weiterhin ist die Komplexabbildung

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P \arrow[r, hook] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Q/P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein Quasiisomorphismus, d.h. in $\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(A\text{-}\mathtt{proj}) \simeq \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(A\text{-}\mathtt{mod})$ ist jedes unzerlegbare Objekt isomorph zu einem verschobenen unzerlegbaren Modul.

Seien nun M_1 und M_2 beliebige endlich erzeugte A-Moduln und

$$0 \longrightarrow P_1 \hookrightarrow Q_1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0 \quad \text{bzw.} \quad 0 \longrightarrow P_2 \hookrightarrow Q_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

exakt mit P_1, P_2, Q_1, Q_2 projektiv endlich erzeugt (möglich da A erblich). Nach dem Vergleichssatz für projektive Auflösungen lässt sich jeder Morphismus $f\colon M_1 \to M_2$ hochheben zu einem Kettenmorphismus f_* zwischen den projektiven Auflösungen, eindeutig bis auf Homotopie.

Allgemein liefert dies für einen beliebigen Ring einen voll-treuen Funktor

$$A\text{-}\mathtt{mod} \longrightarrow \mathcal{D}(A\text{-}\mathtt{mod}).$$

Zurück zu unserem Spezialfall von oben, betrachte Kettenabbildungen zwischen der projektiven Auflösung von M_1 und der verschobenen Auflösung von M_2.

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, hook, "d"] \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\hat{f}"] & Q_1 \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r, hook, "d"] & Q_2 \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd}$$

Vergleiche diese $\hat{f}$ bis auf Homotopie mit der Definition von Ext^1, wende also $\operatorname{Hom}_A(-, M_2)$ auf die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

an, also erhalte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M_1, M_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Q_1, M_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(P_1, M_2) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_A(M_1, M_2) \longrightarrow 0.$$

Dann ist $\mathrm{Ext}^1_A(M_1, M_2) \simeq \mathrm{Hom}_A(P_1, M_2)/d(\mathrm{Hom}_A(Q_1, M_2))$. Jeder Morphismus $P_1 \to M_2$ induziert ein $\hat{f}\colon P_1 \to Q_2$, welches eindeutig bis auf Faktorisierung über P_2 ist.

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "\hat{f}"'] \arrow[d] & \\ Q_2 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ein Vergleich mit dem $\hat{f}$ von oben zeigt, dass

$$\mathrm{Ext}^1_A(M_1, M_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(A\text{-}\mathtt{proj})}(P_1 \to Q_1, (P_2 \to Q_2)[1]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^{\mathrm{b}}(A\text{-}\mathtt{proj})}(M_1, M_2[1]).$$

Für einen allgemeinen Ring gilt eine ähnliche Aussage, nämlich

$$\mathrm{Ext}^n_A(M_1, M_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(A\text{-}\mathtt{mod})}(M_1, M_2[n]).$$

für $n \geq 0$. Ist $n < 0$, so ist $\mathrm{Ext}^n_A(M_1, M_2) = 0$.

Bemerkung Falls A nicht erblich, ist nicht mehr jeder unzerlegbare beschränkte Komplex mit projektiven Einträgen quasiisomorph zu einem verschobenen Modul. Ist M unzerlegbar mit $\operatorname{projdim} M > 1$, so wähle eine minimale projektive Auflösung und schneide diese ab an $k < \operatorname{projdim} M$.

$$0 \longrightarrow P_k \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

Die Homologie an 0 ist $M \neq 0$ und da die Auflösung minimal gewählt wurde ist die Homologie auch an k nicht 0. Doch damit kann dieser Komplex nicht quasiisomorph zu einem verschobenen Modul sein, da dieser nur an einer Stelle eine Homologie ungleich 0 besitzt.

Beispiel Ist $A = k[x]/(x^2)$, so ist A nicht erblich. Betrachte den beschränkten Komplex mit projektiven Einträgen

$$0 \longrightarrow \underbrace{A}_{P_3} \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} \underbrace{A}_{P_0} \longrightarrow 0$$

Dann ist an P_3 die Homologie gleich $\langle x \rangle / 0 \simeq k$ und an P_0 die Homologie gleich $A/\langle x \rangle \simeq k$.