Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 2

(1) Sei A die Kroneckeralgebra. Bestimmen Sie die Matrizen Φ_A und Φ_A^{-1} und ihre n-ten Potenzen für alle n.
Bestimmen Sie die Dimensionsvektoren der AR-Verschobenen der unzerlegbaren projektiven und der unzerlegbaren injektiven Moduln.
Sind diese Moduln eindeutig durch ihre Dimensionsvektoren bestimmt?
Geben Sie unzerlegbare Köcherdarstellungen mit diesen Dimensionsvektoren explizit an.

(2) Eine endlich-dimensionale k-Algebra A heisst *symmetrisch*, wenn es einen A-A-Bimodul-Isomorphismus $A \simeq D(A)$ gibt. Sei A symmetrisch. Zeigen Sie:
  (a) Die Funktoren $D(-) = Hom_k(-, k)$ und $Hom_A(-, A)$ sind isomorph.
  (b) Ein A-Modul M ist projektiv genau dann wenn er injektiv ist.
  (c) Der Nakayama-Funktor ν ist isomorph zur Identität.
  (d) Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, dass kG eine symmetrische Algebra ist.
  (e) Sei B eine Algebra und $B \ltimes D(B)$ der Vektorraum $B \oplus D(B)$ mit der Multiplikation $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc)$ (die 'triviale Erweiterung von B'). Zeigen Sie, dass $B \ltimes D(B)$ eine symmetrische Algebra ist und es einen surjektiven Algebrenhomomorphismus $B \ltimes D(B) \to B$ gibt.
  (f) Sei M ein Modul und $0 \to \Omega(M) \to P \to M \to 0$ eine exakte Sequenz mit P projektiv. (Ω wird Heller-Operator genannt, oder first syzygy.) Zeigen Sie, dass dies einen Funktor $\Omega : A - \underline{mod} \to A - \underline{mod}$ definiert. Zeigen Sie, dass DTr und Ω^2 isomorph sind.
  (g) Bearbeiten Sie damit die Aufgabe (2) von Blatt 4.

Die Übungen finden am Freitag statt, im Seminarraum V57.7.527, von 9:45 bis 11:15.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg2/DarstThHomAlg2.t`