Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 2

(1) Sei R ein Ring und V ein R-Bimodul. Sei Λ ein Ring und $\varphi : R \oplus V \to \Lambda$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: Eingeschränkt auf R ist φ ein Ringhomomorphismus; dadurch wird Λ ein R-Bimodul. Damit ist φ eingeschränkt auf V eine R-Bimodulabbildung.
Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\Phi : T(R, V) \to \Lambda$ gibt, der φ fortsetzt.
Sei nun $R = \bigoplus_{i=1}^{n} k$ ein endliches Produkt von Kopien von k, und V endlich-dimensional. Definieren Sie den Köcher Q von $T(R, V)$ so, dass Φ ein Isomorphismus von $T(R, V)$ mit kQ wird.

(2) Sei A eine endlich-dimensionale k-Algebra mit $R := A/rad(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} k$ (ein endliches Produkt von Kopien von k), $e_1, \ldots, e_n$ ein vollständiges System primitiver paarweise orthogonaler Idempotente und $r_1, \ldots, r_l$ Elemente in $rad(A)$, deren Bilder in $V := rad(A)/(rad^2(A))$ dieses als $A/rad(A)$-Modul erzeugen.
Zeigen Sie, dass die $e_1, \ldots, e_n$ zusammen mit den $r_1, \ldots, r_l$ die k-Algebra A erzeugen.
Zeigen Sie, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus $T(R, V) \to A$ gibt.

(3) Eine endlich-dimensionale k-Algebra A mit$A/rad(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} k$ heißt *elementar*.
Formulieren und beweisen Sie: Eine endlich-dimensionale elementare k-Algebra ist eindeutig durch Köcher und Relationen gegeben.
Für welche Köcher und Relationen erhält man eine Nakayama-Algebra?

(4) Bestimmen Sie die projektiv stabile Modulkategorie und die injektiv stabile Modulkategorie der folgenden Algebren:
$A_1 = k[x]/x^3$,
$A_2 := A_1 \oplus A_1$,
$A_3 := \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$,
A_4 eine unzerlegbare Nakayama-Algebra mit zwei einfachen Moduln, $rad(A_4)^2 = 0$ und Dimension 4.
Welche dieser Kategorien sind äquivalent?

Die Übungen finden am Freitag statt, im Seminarraum V57.7.527, von 9:45 bis 11:15.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg2/DarstThHomAlg2.t`