Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 2

(1) Ein endlich-dimensionaler Modul M heißt *einreihig*, wenn er genau eine Jordan-Hölder Reihe hat; das heißt, M hat einen eindeutigen maximalen Teilmodul M_1, der einen eindeutigen maximalen Teilmodul M_2 hat, usw. Eine endlich-dimensionale Algebra A heißt *Nakayama-Algebra*, wenn sowohl die unzerlegbaren projektiven A-Moduln als auch die unzerlegbaren injektiven A-Moduln einreihig sind.

Die Loewylänge $LL(X)$ eines Moduls X ist das minimale n mit $rad^n(X) = 0$.

(a) Geben Sie Beispiele von Nakayama-Algebren an.

(b) Zeigen Sie, dass Quotienten von Nakayama-Algebren wieder Nakayama-Algebren sind.

(c) Sei A eine Nakayama-Algebra und P ein unzerlegbarer projektiver A-Modul maximaler Loewylänge (unter den projektiven Moduln). Zeigen Sie, dass $LL(P)$ dann auch maximal ist unter den Loewylängen aller A-Moduln. Zeigen Sie, dass P injektiv ist.

(d) Sei A eine Nakayama-Algebra und M ein unzerlegbarer A-Modul. Zeigen Sie, dass M Quotient eines unzerlegbaren projektiven Moduls ist und damit auch einreihig. Stimmt das auch ohne die Voraussetzung, dass A eine Nakayama-Algebra ist?

(e) Zeigen Sie, dass Nakayama-Algebren endlichen Darstellungstyp haben, dass es also bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Moduln gibt. Geben Sie in Beispielen alle unzerlegbaren Moduln an.

(f) Sei Λ irgendeine endlich-dimensionale Algebra und P ein unzerlegbarer projektiver Modul. Hat P bis auf Isomorphie nur endlich viele Quotienten?

(2) Seien A und B k-Algebren. Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt $A \otimes_k B$ eine k-Algebra ist mit der Multiplikation $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$.
Gilt $rad(A \otimes_k B) = rad(A) \otimes_k rad(B)$?
Ist das Tensorprodukt von zwei Wegealgebren auch eine Wegealgebra?
Ist das Tensorprodukt von zwei Nakayama-Algebren auch eine Nakayama-Algebra?

(3) Sei R ein Ring und V ein R-Bimodul. Definieren Sie eine Multiplikation auf $T(R, V) := R \oplus V \oplus (V \otimes_R V) \oplus (V \otimes_R V \otimes_R V) \oplus ...$ (unendliche direkte Summe). Zeigen Sie, dass $T(R, V)$ eine R-Algebra ist, wenn R kommutativ ist. $T(R, V)$ wird als *Tensoralgebra* bezeichnet.
Sei nun $R = \bigoplus_{i=1}^{n} k$ ein endliches Produkt von Kopien von k, und V endlich-dimensional. Ist die Tensoralgebra die Wegealgebra eines Köchers? Lassen sich umgekehrt Wegealgebren als Tensoralgebren schreiben?

Die Übungen finden erstmals am Freitag, 21.4.2017 statt, im Seminarraum V57.7.527, von 9:45 bis 11:15.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg2/DarstThHomAlg2.t`