Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 2

(1) Sei $f : B \to C$ eine Abbildung von Kettenkomplexen. Der *Abbildungszylinder* $Zyl(f)$ hat im Grad n den Eintrag $B_n \oplus B_{n-1} \oplus C_n$ und das Differential

$$d(a, b, c) := (d(a) + b, -d(b), d(c) - f(b)).$$

Wenn $f : B \to B$ die Identität ist, wird $Zyl(f)$ auch mit $Zyl(B)$ bezeichnet.
- (a) Zeigen Sie, dass $Zyl(f)$ ein Kettenkomplex ist.
- (b) Zeigen Sie, dass zwei Abbildungen $f, g : C \to D$ zueinander homotop sind, genau dann wenn sie sich zu einer Abbildung $(f, s, g) : Zyl(C) \to D$ erweitern lassen.
- (c) Zeigen Sie, dass der Teilkomplex von $Zyl(f)$, der aus Elementen $(0, 0, c)$ besteht, isomorph zu C ist und bestimmen Sie den Quotienten $Zyl(f)/C$. Wann ist die Inklusion $C \to Zyl(f)$ ein Qis? Wann gibt es eine Homotopieäquivalenz zwischen C und $Zyl(f)$?

(2) Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien. Zeigen Sie, dass F Funktoren zwischen den Kategorien von Komplexen und zwischen den Homotopiekategorien induziert. Diese Funktoren werden ebenfalls mit F bezeichnet.
- (a) Zeigen Sie, dass F als Funktor zwischen Kategorien von Komplexen Abbildungskegel erhält.
- (b) Zeigen Sie, dass ein Komplex mit nur drei nichtverschwindenden Termen exakt ist, genau dann wenn er zu 0 quasi-isomorph ist.
- (c) Zeigen Sie, dass der Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ exakt ist, genau dann wenn der induzierte Funktor zwischen Homotopiekategorien Quasi-Isomorphismen erhält.

(3) Sei I eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden, und $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, die genügend viele injektive Objekte besitzt und die vollständig ist, d.h. alle Produkte mit beliebigen Indexmengen existieren. Mit $\mathcal{A}^I$ wird die Funktorkategorie bezeichnet.
- (a) Definieren Sie für festes A in $\mathcal{A}$ und k in I einen Funktor von I nach $\mathcal{A}$, der i auf ein Produkt von Kopien von A schickt, mit $Hom_I(i, k)$ als Indexmenge.
- (b) Definieren Sie für k in I einen additiven Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}^I$, der rechtsadjungiert zum k-ten Koordinatenfunktor ist.
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}^I$ genügend viele injektive Objekte hat.
- (d) Formulieren und beweisen Sie duale Aussagen.

Die Übungen finden am Freitag statt, im Seminarraum V57.7.527, von 9:45 bis 11:15.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg2/DarstThHomAlg2.t`