Scheinklausur – Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 - 9.Juli 2016

Füllen Sie bitte die Tabelle aus (**1 Punkt**):

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Name des Tutors:
Gruppennummer:

Aufgabe		1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Punkte	/ 1	/ 3	/ 8	/ 8	/ 10	/ 7	/ 8	/ 4	/ 8	/ 4	/ 61

In allen Aufgaben sind die Vektorräume endlich-dimensionale K-Vektorräume über einem Körper K.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei V ein Vektorraum der Dimension n. Seien U_1 und U_2 Unterräume von V mit $\dim U_1 = m_1 > 0$ und $\dim U_2 = m_2 > 0$. Sei $W = \mathsf{Hom}_K(U_1^\circ, U_2)$. Bestimmen Sie:

$\dim U_1^\circ =$ $\boxed{}$ $\dim W =$ $\boxed{}$ $\dim W^* =$ $\boxed{}$

Aufgabe 2. Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) Sei $\alpha \in \mathsf{End}_K(V)$ und $f, g \in K[x]$ Polynome mit $f \mid g$. Dann gilt:

(a) (**2 Punkte**) $\mathsf{ker}(f(\alpha)) \subseteq \mathsf{ker}(g(\alpha))$

(b) (**2 Punkte**) $\mathsf{ker}(f(\alpha)) \supseteq \mathsf{ker}(g(\alpha))$

(2) (**2 Punkte**) Eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ von Vektorräumen ist genau dann injektiv, wenn ihre duale Abbildung $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ injektiv ist.

(3) (**2 Punkte**) Seien $\alpha, \beta \in \mathsf{End}_K(V)$. Dann gilt $m_{\alpha \circ \beta} = m_{\beta \circ \alpha}$ für die Minimalpolynome der Kompositionen $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$.

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie:

(1) (**2 Punkte**) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$ ist eine Linearform.

(2) (**2 Punkte**) Gilt $A = TBS^{-1}$ für zwei $n \times n$-Matrizen A und B und zwei invertierbare Matrizen S und T, so haben A und B das gleiche Minimalpolynom.

(3) (**2 Punkte**) Sei A eine quadratische Matrix, so dass A^m für ein $m \geq 1$ diagonalisierbar ist. Dann ist auch A diagonalisierbar.

(4) (**2 Punkte**) Seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $v \neq 0 \neq w$, so dass für das euklidische Skalarprodukt $\langle v, w \rangle = 0$ gilt. Dann sind v und w linear unabhängig.

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Bestimmen Sie:

(1) (**2 Punkte**) das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A:

$\chi_A(t) =$ $\qquad$ $m_A(t) =$

(2) (**4 Punkte**) eine Jordan-Normalform J von A und eine invertierbare Matrix S, so dass $J = S^{-1} A\, S$ gilt:

$J =$ $\boxed{}$ $\quad S =$ $\boxed{}$ $\quad S^{-1} =$ $\boxed{}$

(3) (**4 Punkte**) für alle $n \geq 1$: $\quad A^n =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5. (**7 Punkte**) Bestimmen Sie das Minimalpolynom, das charakteristische Polynom, und eine Jordan-Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \qquad J = \boxed{}$$

Hinweis: Jeder Eigenwert von A ist 4.

$m_A(t) =$ $\boxed{}$ $\quad \chi_A(t) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 6. Gegeben sind zwei Ebenen im affinen Raum $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -x + 3y + 3z = 3 \right\}.$$

(1) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $A\,v = w$ mit Lösungsmenge E_1.

$A =$ $\boxed{}$ $\quad w =$ $\boxed{}$

(2) (**4 Punkte**) Sei $E = E_1 \cap E_2$. Bestimmen Sie einen Vektor p und einen Unterraum U mit $E = p + U$, und geben Sie eine affine Basis $\mathcal{B}$ von E an.

$p =$ $\boxed{}$ $\quad U =$ $\boxed{}$ $\quad \mathcal{B} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei A eine 5×5-Matrix mit Minimalpolynom $(t-3)^3(t-2)$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordan-Normalformen von A bis auf Ähnlichkeit. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8. Zeigen Sie:

(1) (**4 Punkte**) Sei E eine affine Ebene und seien $G_1 = p_1 + U_1$ und $G_2 = p_2 + U_2$ Geraden in E mit $U_1 \neq U_2$. Dann schneiden sich die Geraden G_1 und G_2 in genau einem Punkt.

(2) (**4 Punkte**) Seien $A_1 = p + U_1$ und $A_2 = p + U_2$ affine Teilräume von V.
$A_1 \cup A_2$ ist genau dann ein affiner Teilraum von V, wenn $A_1 \subseteq A_2$ oder $A_2 \subseteq A_1$ gilt.

Aufgabe 9. (**4 Punkte**) Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die Vektoren v_1, v_2, v_3 des $\mathbb{R}^4$ an:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}. \qquad b_1 = \qquad b_2 = \qquad b_3 =$$