LAAG 2 - Modulprüfung

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig.**
- In **allen Aufgaben** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 01.10.2016 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen **vom 19.10.2016 bis 21.10.2016 zwischen 10:00 und 11:00 oder vom 19.10.2016 bis 20.10.2016 zwischen 14:00 und 15:00** mit Elke Gangl (Raum V57.7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*)

Sei A die reelle Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie:

(a) das charakteristische Polynom von A,

(b) Basen der Eigenräume von A,

(c) eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Sei f ein unitärer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Vektorraums V.

(a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von f Betrag 1 haben.

(b) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene Eigenwerte von f. Sei v_1 ein Eigenvektor zu λ_1 und v_2 ein Eigenvektor zu λ_2.
Zeigen Sie, dass v_1 zu v_2 orthogonal ist.

Aufgabe 3 (*12 Punkte*)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie

(a) charakteristisches Polynom,

(b) die Hauptraumzerlegung zusammen mit Basen der Haupträume, und

(c) eine Jordan-Normalform

von A.

(d) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}\,(f(A))$ für $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^3$.

Aufgabe 4 (*7 Punkte*)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine affine Abbildung, so dass gilt:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad p_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix A und einen Vektor b, so dass $f(x) = A\,x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe 5 (*4 Punkte*)

Sei V ein endlich-dimensionaler und unitärer Vektorraum. Bestimmen Sie alle Endomorphismen von V, die nilpotent und normal sind.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*)

Seien $G_1 = p_1 + \langle u_1 \rangle$ und $G_2 = p_2 + \langle u_2 \rangle$ Geraden in einem affinen Raum A.

Die Geraden G_1 und G_2 heißen *windschief*, wenn sie nicht parallel sind und sich nicht schneiden.

Zeigen Sie:
Die Vektoren $\overrightarrow{p_1\,p_2},\ u_1, u_2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn G_1 und G_2 windschief sind.

Aufgabe 7 (*7 Punkte*)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix, so dass A^p für ein $p \geqq 1$ diagonalisierbar ist.
Zeigen Sie, dass auch A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede komplexe 2×2-Matrix A gibt es eine komplexe 2×2-Matrix B mit $A = B^2$.

Aufgabe 9 (*7 Punkte*)

(a) Sei $W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$ ein Unterraum von $V = \mathbb{C}^4$. Bestimmen Sie Unterräume U_1, U_2 von V mit $W = U_1 \cap U_2$ und $\dim(U_1)=\dim(U_2) = 3$.

(b) Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \geqq 2$ und W ein echter Unterraum von V. Zeigen Sie:
Es gibt Unterräume $U_1, U_2, ..., U_l$ von V mit $W = \bigcap_{i=1}^{l} U_i$ und $\dim(U_i)=n-1$ für $i = 1, 2, \ldots, l$.
