Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 9

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert. ^{T} bezeichnet stets transponieren.

Aufgabe 50 (schriftlich)

a) Sei A eine komplexe 5×5-Matrix mit charakteristischem Polynom und Minimalpolynom gleich $(t-1)\,(t^2-2t+2)^2$. Berechnen Sie eine komplexe und eine reelle Jordan-Normalform von A.

b) Sei nun $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12 & 7 & -8 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Q}$.

Bestimmen Sie eine rationale Normalform von B.

Aufgabe 51

a) Sei U der von $(1,0,0,0)^T$ und $(0,2,0,0)^T$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das den affinen Unterraum $(1,1,1,1)^T + U$ als Lösung hat.

b) Zeigen Sie, dass jeder affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ist.

Aufgabe 52

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie einen Vektor $p \in V$ und einen Unterraum $U \subseteq V$, so dass gilt:

a) $p + U = \{\ (x,y,z)^T \in V \mid y - 2z = 1\ \}$.

b) $p + U = A_1 \cap A_2$ für die affinen Räume $A_1 = (1,1,0)^T + \langle\ (0,0,1)^T, (1,-1,0)^T\ \rangle$ und $A_2 = (0,1,1)^T + \langle\ (1,1,0)^T, (1,-1,1)^T\ \rangle$.

Aufgabe 53

Sei A ein affiner Raum über einem Körper K und seien U_1 und U_2 affine Unterräume von A, für die gilt: $U_1 \subseteq U_2$ und $\dim(U_1) = \dim(U_2) \neq 0$. Zeigen Sie: $U_1 = U_2$.

Aufgabe 54

Sei $V = \mathbb{R}^4$, $p = v_1 = (1,0,0,0)^T$, $v_2 = (1,1,1,1)^T$, $v_3 = (1,2,0,0)^T$ und $v_4 = (0,0,1,1)^T$. Seien $U_1 = p + \langle v_1, v_2 \rangle$ und $U_2 = p + \langle v_3, v_4 \rangle$. Zeigen Sie:

a) der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist eine Gerade g, die p enthält.

b) der affine Raum $p + \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ ist eine Hyperebene h, die den Nullpunkt enthält.

Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g und die Hyperebene h an.

Aufgabe 55*

Sei A ein n-dimensionaler affiner Raum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen. Bestimmen Sie die Anzahl der Abbildungen $f : A \to A$ mit der Eigenschaft:

a) f ist bijektiv und es gibt eine Abbildung $f_\star : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ mit $\overrightarrow{f(p)\,f(q)} = f_\star(\overrightarrow{p\,q})$ für alle $p, q \in A$.

b) f ist injektiv und schickt Punkte auf einer gemeinsamen Geraden auf Punkte auf einer gemeinsamen Geraden.