Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 8

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 45 (schriftlich)

Berechnen Sie eine komplexe Jordan-Normalform J und eine Matrix P mit $P^{-1}AP = J$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie auch das Minimalpolynom von A und die Hauptraumzerlegung.
Hinweis: A hat Eigenwerte 2 und 3.

Aufgabe 46

Sei W ein drei-dimensionaler affiner Raum über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen.

a) Wieviele Punkte, Geraden und Ebenen gibt es in W?

b) Sei g eine Gerade in W. Wieviele zu g parallele Geraden gibt es in W?

Aufgabe 47

Wir betrachten in dieser Aufgabe Matrizen mit komplexen Einträgen.
Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Wir ordnen σ eine $n \times n$-Matrix P_σ wie folgt zu: $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$, wobei hier $\delta_{i,j} = 1$, falls $i = j$ und $\delta_{i,j} = 0$ sonst.
Zeigen Sie:

a) Für σ_1 und $\sigma_2 \in S_n$ gilt $P_{\sigma_1\sigma_2} = P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}$.

b) P_σ ist invertierbar. Was ist die Inverse?

c) Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix mit $A^m = E_n$ (die Einheitsmatrix) für ein m mit $1 \leq m \leq n$, dann ist A diagonalisierbar.

d) P_σ ist diagonalisierbar. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von P_σ.

Aufgabe 48

Sei A eine reelle 2×2-Matrix, die nicht ähnlich zu einer reellen oberen Dreiecksmatrix ist. Zeigen Sie, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 49*

Sei $A = (a_{i,j})$ eine $m_1 \times n_1$-Matrix und $B = (b_{i,j})$ eine $m_2 \times n_2$-Matrix mit Einträgen aus einem beliebigen Körper K. Wir definieren das *Kroneckerprodukt* $A \otimes B$ dieser Matrizen als die Blockmatrix $C = (C_{i,j})$, wobei die Blöcke durch $C_{i,j} = a_{i,j}\, B$ für $i \in \{1, \ldots, m_1\}$, $j \in \{1, \ldots n_1\}$ definiert sind. Sei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix.

a) Berechnen Sie $E_m \otimes E_n$.

b) Berechnen Sie $A \otimes E_2$ für eine beliebige 2×2-Matrix A.

c) Zeigen Sie: $(A_1 \otimes B_1)\,(A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2)$.

Wie für Äquivalenz von Matrizen gibt es ein *Rangkriterium*, um Ähnlichkeit von Matrizen zu überprüfen:
Zwei $n \times n$-Matrizen A und B sind genau dann ähnlich über K, wenn gilt:

$$(Rang(A \otimes E_n - E_n \otimes B^t))^2 = Rang(A \otimes E_n - E_n \otimes A^t) \cdot Rang(B \otimes E_n - E_n \otimes B^t),$$

wobei ^{t} hier transponieren bezeichnet.

d) Verifizieren Sie das Rangkriterium oben für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ über den rationalen Zahlen.