Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 6

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 30 (schriftlich)

In dieser Aufgabe betrachten wir Matrizen mit Einträgen aus den komplexen Zahlen.

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die Matrix A nilpotent ist. Bestimmen Sie die Normalform von A und eine Basis, bezüglich der A die Normalform annimmt.

b) Zeigen Sie für $n \leq 6$: Zwei nilpotente $n \times n$ Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn ihre Minimalpolynome und ihre Ränge übereinstimmen.

c) Gilt die Aussage auch noch für $n = 7$?

Aufgabe 31

Gegeben ist die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $f(x) = A \cdot x$. Bestimmen Sie alle f-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 32

Sei K ein Körper, $p \in K[x]$ ein beliebiges Polynom, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und seien $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen mit $fg = gf$.
Zeigen Sie, dass $\text{Kern}(p(f))$ und $\text{Im}(p(f))$ g-invariante Unterräume von V sind.

Aufgabe 33

a) Seien A und B nilpotente 3×3-Matrizen mit komplexen Einträgen.
Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B genau dann ähnlich sind, wenn ihre Minimalpolynome gleich sind.

b) Stimmt die Aussage in a) auch noch für nilpotente 4×4-Matrizen mit komplexen Einträgen?

Aufgabe 34*

a) Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen.
Wieviele nilpotente und wieviele invertierbare 2×2-Matrizen gibt es über $\mathbb{F}_2$?

b) Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen und sei $n \geq 1$.
Wieviele invertierbare $n \times n$ Matrizen gibt es über $\mathbb{F}_q$?

Aufgabe 35*

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.
Seien $a_1, a_2, ..., a_n$ komplexe Zahlen mit $\sum_{k=1}^{n} a_k^m = 0$ für alle $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Zeigen Sie: $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ (*Hinweis*: Benutzen Sie Aufgabe 29 b)).

Aufgabe 36*

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Eine *Partition von n* ist eine Darstellung $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$ mit $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k \geq 1$, wobei a_i auch natürliche Zahlen sind. Die a_i heißen die *Teile der Partition*. Sei $p(n)$ die Anzahl von Partitionen von n.

a) Bestimmen Sie alle Partitionen von $n = 5$.

b) Wieviele verschiedene nilpotente $n \times n$-Matrizen gibt es bis auf Ähnlichkeit über einem Körper? Drücken Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Partitionen aus.

c) Zeigen Sie: Die Anzahl von Partitionen von n mit genau k Teilen ist gleich der Anzahl der Partitionen von $n - k$ mit höchstens k Teilen.

d) Sei $p(n, k, m)$ die Anzahl von Partitionen von n mit höchstens k Teilen und $a_1 \leq m$.
Bestimmen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} p(n, k, m)$.

Aufgabe 37 (**Bonusaufgabe**: Durch schriftliche Bearbeitung und Abgabe können Zusatzpunkte erreicht werden.)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome von λf und $f + \lambda \cdot id_V$ in Abhängigkeit vom charakteristischen Polynom χ_f von f.

b) Bestimmen Sie die Minimalpolynome von λf und $f + \lambda \cdot id_V$ in Abhängigkeit vom Minimalpolynom m_f von f.