Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 5

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 24 (schriftlich)

Sei $n \geq 2$ und seien M, N nilpotente $n \times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen.

a) Zeigen Sie: N^k ist für jedes $k \geq 1$ nilpotent.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $E_n + N$.

c) Gilt $MN = NM$, so sind auch die Matrizen $M + N$ und $M - N$ nilpotent.

d) Ist $M + N$ stets nilpotent?

e) Sei $N^{n-1} \neq 0$. Gibt es eine $n \times n$-Matrix B mit $B^2 = N$?

Aufgabe 25

Sei $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrix M über den komplexen Zahlen. Ist M nilpotent? Ist M diagonalisierbar?

Aufgabe 26

Sei $n \geq 2$.

a) Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix, deren einziger Eigenwert 0 ist. Ist A nilpotent?

b) Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, deren einziger Eigenwert 0 ist. Ist A nilpotent?

Aufgabe 27

a) Sei m_A das Minimalpolynom einer Matrix A mit komplexen Einträgen. Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $m_A(0) \neq 0$. Bestimmen Sie im Falle der Invertierbarkeit die Inverse von A in Abhängigkeit von den Koeffizienten von m_A.

b) Sei $n \geq 2$ und K der Körper der komplexen Zahlen. Sei B eine $n \times n$-Matrix vom Rang 1. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von B. Für welche $a \in K$ ist $aE_n + B$ invertierbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen die Inverse (Hinweis: Machen Sie sich klar, dass das Minimalpolynom höchstens Grad 2 haben kann).

Aufgabe 28

Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit Dimension $n \geq 2$ und U ein Unterraum von V.
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f(U) \subseteq U$ und $\overline{f} : V/U \to V/U$ die von f induzierte lineare Abbildung. m_1 sei das Minimalpolynom von $f|U$, m_2 das Minimalpolynom von $\overline{f}$ und m_3 das Minimalpolynom von f. Zeigen Sie:

a) m_1 teilt m_3 und m_2 teilt m_3.

b) m_3 teilt $m_1 m_2$.

c) Sei r der Rang von f. Dann gilt $\mathrm{grad}(m_3) \leq r + 1$.

Aufgabe 29*

Sei $n \geq 1$. Sei $V = \mathbb{C}^n$ ein komplexer n-dimensionaler Vektorraum und seien f und g lineare Abbildungen $V \to V$. Wir definieren $[f, g] := fg - gf$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Spur}([f, g]) = 0$.

b) f ist genau dann nilpotent, wenn $\mathrm{Spur}(f^i) = 0$ für $i = 1, 2, ..., n$.

c) Gilt $[f, [f, g]] = 0$, so ist $[f, g]$ nilpotent.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\chi_f(f) = 0$, wenn χ_f das charakteristische Polynom von f bezeichnet. Alternativ kann auch Aufgabe 27 a) nützlich sein.