
Blatt 4

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 18 (schriftlich)

V bezeichne den Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei U der von $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugte Unterraum und $\phi : U \rightarrow U, \phi(f) = f'$, wenn f' die Ableitung einer Funktion bedeutet.

- Zeigen Sie, dass ϕ wohldefiniert und linear ist.
- Bestimmen Sie das Minimalpolynom von ϕ .
- Sei $p(x) := x^3 + 2$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix der Abbildung $p(\phi)$ bezüglich der Basis $B = \{\cos(x), \sin(x)\}$. Bestimmen Sie $\text{Kern}(p(\phi))$.
- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19

Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren, das charakteristische Polynom und das

Minimalpolynom der Matrix $\begin{pmatrix} 12 & -10 & -6 \\ 6 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 20

Sei A eine 2×2 -Matrix mit charakteristischem Polynom χ_A und Minimalpolynom m_A . Berechnen Sie $\chi_A(A)$. Bestimmen Sie m_A .

Aufgabe 21

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie: Für ein gegebenes Polynom p ist $p(A)$ genau dann invertierbar, wenn p und m_A teilerfremd sind, wobei m_A das Minimalpolynom von A ist.

Aufgabe 22

- a) Zeigen Sie: Ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom.
- b) Gibt es zwei 3×3 -Matrizen mit gleichem Minimalpolynom, die nicht ähnlich sind?
- c) Gegeben ist die Blockmatrix $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ mit einer $s \times s$ -Matrix B und einer $m \times m$ -Matrix C . Zeigen Sie für die Minimalpolynome: $m_A = \text{kgV}(m_B, m_C)$.

Aufgabe 23*

Sei $f = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ ein normiertes (d.h. $b_n = 1$) Polynom vom Grad $n \geq 1$. Wir definieren die $n \times n$ Matrix $A_f = (a_{i,j})_{i,j}$ durch $a_{i+1,i} = 1$ für $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $a_{i,n} = -b_{i-1}$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $a_{i,j} = 0$ sonst. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A_f .