Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 3

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 12 (schriftlich)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und seien U_1 und U_2 Unterräume. Zeigen Sie:

a) Ist $U_1 \cong U_2$, so auch $U_1^\circ \cong U_2^\circ$.

b) $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$

c) $(U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$.

d) Es gilt $U_1 \subseteq U_2$ genau dann, wenn $U_2^\circ \subseteq U_1^\circ$.

Aufgabe 13

Sei V_n der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit der Basis $B := \{1, x, x^2, ..., x^n\}$. Sei $f_1 : V_n \to V_n, f_1(p) = p'$ und $f_2 : V_n \to V_n, f_2(p) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Bestimmen Sie die zu B duale Basis B^*.

b) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen von f_1^* und f_2^* bezüglich B^*.

Aufgabe 14

Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei U ein Unterraum von V mit $f(U) \subseteq U$. Sei $\pi : V \to V/U$ die Projektion. Wir definieren $\overline{f} : V/U \to V/U$ durch $\overline{f}(x + U) = f(x) + U$.

a) Zeigen Sie, dass $\overline{f}$ wohldefiniert und linear ist.

b) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome gilt: $\chi_f = \chi_{\overline{f}} \cdot \chi_{f|_U}$, wobei $f|_U : U \to U$ die Einschränkung von f auf U bezeichnet.

c) Ist $\overline{f}$ diagonalisierbar, wenn f diagonalisierbar ist und nur einfache Eigenwerte hat?

d) Ist f diagonalisierbar, wenn $\overline{f}$ es ist?

Aufgabe 15

Sei V ein Vektorraum mit Dimension $n \geq 2$. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und H ein Unterraum von V mit Dimension $n-1$. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $h \in V^*$ mit $H = Kern(h)$.

b) Genau dann gilt $f(H) \subseteq H$, wenn ein solches h ein Eigenvektor von f^* ist.

Aufgabe 16

Gegeben ist der von $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^5$ aufgespannte Unterraum U.

Bestimmen Sie eine Basis von U°.

Aufgabe 17*

Seien V, W komplexe Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt $\mathbb{C}$-antilinear, falls $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$ gilt für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei $Hom_{\overline{\mathbb{C}}}(V, W)$ die Menge der $\mathbb{C}$-antilinearen Abbildungen zwischen V und W. Zeigen Sie:

a) $Hom_{\mathbb{C}}(V, W)$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $Hom_{\mathbb{R}}(V, W)$.

b) $Hom_{\overline{\mathbb{C}}}(V, W)$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $Hom_{\mathbb{R}}(V, W)$.

c) $Hom_{\mathbb{R}}(V, W) = Hom_{\mathbb{C}}(V, W) \oplus Hom_{\overline{\mathbb{C}}}(V, W)$.