Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 2

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 6 (schriftlich)

a) Sei R ein kommutativer Ring und $U(R) := \{x \in R | \exists y \in R : xy = 1\}$. Zeigen Sie, dass $U(R)$ mit der Multiplikation des Ringes R eine Gruppe ist.

b) Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass $x \in U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ äquivalent zu ggT(x, n)=1 ist. Bestimmen Sie $U(\mathbb{Z}/93\mathbb{Z})$.

c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

d) Bestimmen Sie alle Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_3 auf 3 Buchstaben und die zugehörigen Faktorgruppen.

Aufgabe 7

a) Sei G eine Gruppe und $Z(G) := \{x \in G | \forall y \in G : xy = yx\}$. Ist $Z(G)$ ein Normalteiler in G? Bestimmen Sie $Z(S_3)$, wenn S_3 die symmetrische Gruppe auf 3 Buchstaben bezeichnet.

b) Zeigen Sie: Jede Untergruppe U einer Gruppe G vom Index 2 ist ein Normalteiler.

Aufgabe 8

Sei f die Abbildung $f(A)$ =Spur(A), wobei $Spur(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,i}$ wenn $A = (a_{i,j})_{i,j}$ eine $n \times n$-Matrix ist. Sei V der Vektorraum aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$.

a) Geben Sie eine Basis B von V an.

b) Zeigen Sie: $f \in V^*$.

c) Geben Sie den Koordinatenvektor von f bezüglich der zu B dualen Basis an.

Aufgabe 9

Sei V_n der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Sei $f_1 : V_n \to \mathbb{R}$ die Abbildung $f_1(p) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $f_2 : V_n \to \mathbb{R}$ die Abbildung $f_2(p) = p^{(n)}$ (n-te Ableitung) und $f_3 : V_n \to \mathbb{R}$ die Abbildung $f_3(p) = 1$.

a) Geben Sie eine Basis B von V_n an.

b) Welche f_i sind in V_n^*?

c) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren der $f_i \in V_n^*$ bezüglich einer zu B dualen Basis.

Aufgabe 10

a) Sei L der von $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Unterraum von $W = \mathbb{R}^2$. Geben Sie eine Basis von W/L an und beschreiben Sie die Elemente von W/L geometrisch.

b) Sei nun V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V. Sei $\pi : V \to V/U$ die Projektion und $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$. Zeigen Sie: Sind $\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_n)$ linear unabhängig in V/U, so sind auch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linear unabhängig in V. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 11*

Zeigen Sie, dass jede Permutation als Produkt von disjunkten Zyklen geschrieben werden kann. Sei $s_{n,k}$ die Anzahl an Permutationen in der symmetrischen Gruppe S_n mit genau k disjunkten Zyklen, wobei $s_{0,0} := 0$ und $s_{0,k} := 0$ für alle $k > 0$.

a) Schreiben Sie alle Elemente aus S_3 als Produkt von disjunkten Zyklen.

b) Zeigen Sie: $s_{n,1} = (n-1)!$ und $s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$.

c) Zeigen Sie für $n \geq 1$ die Rekursion $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$.

d) Bestimmen Sie $s_{n,2}$.

e) Finden Sie alle Nullstellen von $\sum_{k=0}^{n} s_{n,k}x^k$.