Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 13

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 76

Sei V der euklidische Raum $\mathbb{R}^3$.
Sei $f : V \to V$ eine orthogonale Abbildung mit Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und zugehörigem Eigenvektor v_1. Der Untervektorraum $\langle v_1 \rangle^\perp$ wird die *Drehebene von* f genannt und der Winkel α mit $Spur(f) = 1 + 2\cos(\alpha)$ wird der *Drehwinkel* genannt.

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal mit Eigenwert 1 sind und bestimmen Sie einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert 1, eine Basis der Drehebene $\langle v_1 \rangle^\perp$ und den Drehwinkel α.

b) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix über $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 77

Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{C}$, für die

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{\sqrt{2}} & a \\ -\frac{i}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{(1-i)}{2} & 0 & c \end{pmatrix}$$

eine unitäre Matrix ist.

Aufgabe 78

Sei $n \geq 2$, V der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$.
Für $0 \neq a \in V$ definieren wir eine lineare Abbildung $S_a : V \to V$ durch $S_a(x) = x - 2\frac{\langle a,x \rangle}{\langle a,a \rangle} a$.
Zeigen Sie:

a) $S_a^2 = \mathrm{id}$ und S_a ist eine orthogonale Abbildung.

b) $S_a(x) = -x$ für alle $x \in \langle a \rangle$ und $S_a(x) = x$ für alle $x \in \langle a \rangle^\perp$.
Deshalb wird S_a auch *Spiegelung an der Hyperebene* $\langle a \rangle^\perp$ genannt.

c) Für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$ und $\|v\| = \|w\|$ gibt es ein $0 \neq a \in V$, so dass $S_a(v) = w$ und $S_a(w) = v$ gilt.

d) Jede orthogonale Abbildung $f : V \to V$ mit $f \neq \mathrm{id}$ ist Produkt von höchstens n Spiegelungen.

Aufgabe 79

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. f wird *winkeltreu* genannt, wenn für alle $x, y \in V$ der Winkel zwischen x und y gleich dem Winkel zwischen $f(x)$ und $f(y)$ ist. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen:

a) f ist winkeltreu.

b) $x, y \in V$ sind genau dann orthogonal, wenn $f(x)$ und $f(y)$ orthogonal sind.

c) $f = \lambda g$ mit $\lambda = \|f(x_0)\|$ für einen beliebigen Vektor x_0 mit $\|x_0\| = 1$ und einer orthogonalen Abbildung g.

Aufgabe 80*

a) Sei A eine komplexe $m \times m$-Matrix mit von 0 verschiedenen Zeilen $a_1, a_2, ..., a_m$. Zeigen Sie:

- $|\det(A)| \leq \|a_1\| \, \|a_2\| \, ... \, \|a_m\|$.
- Gleichheit gilt genau dann, wenn je zwei verschiedene Zeilen orthogonal sind.

b) Sei $H = (h_{i,j})$ eine reelle $m \times m$-Matrix, so dass $|h_{i.j}| \leq 1$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt. Zeigen Sie:

- $|\det(H)| \leq m^{\frac{m}{2}}$
- Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$h_{i.j} \in \{-1,\ 1\} \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \ldots, m\}, \quad \text{und} \quad H\,H^T = m\,E \tag{1}$$

gilt, wobei E die Einheitsmatrix der Größe m bezeichnet.

c) Geben Sie Beispiele von Matrizen H mit Eigenschaft (1) für $m = 1, 2$ und 4 an.

d) Sei H eine $m \times m$-Matrix mit Eigenschaft (1).
Zeigen Sie: $m = 1, 2$ oder $m = 4k$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

e) Geben Sie Beispiele von Matrizen H mit Eigenschaft (1) und $m = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ an.

Bemerkung:
Es ist eine offene Vermutung, ob es für jedes $m \equiv 0 \mod 4$ eine $m \times m$-Matrix mit Eigenschaft (1) gibt.

Informationen zur Scheinklausur:
Die Scheinklausur findet am Samstag, dem 9.7.2016, statt und beginnt um 13:00 in Raum

- V 47.01 für Studierende, deren Nachname mit A-M beginnt, bzw.
- V 47.02 für Studierende, deren Nachname mit N-Z beginnt.

Kommen Sie bitte bereits um 12:45 und bringen Sie Ihren Studierendenausweis, Papier und Stifte (keine Blei- oder Rotstifte) mit. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Notizen und elektronische Hilfsmittel sind nicht zugelassen. Darunter fallen jegliche Arten von Taschenrechnern, Organizern, Laptops, Mobiltelefone und ähnliches.