Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 11

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert. ^{T} bezeichnet stets transponieren.

Aufgabe 62 (schriftlich)

a) Welche der Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische Bilinearform?

  i) $f_1((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 2\, x_1 y_1$.
  ii) $f_2((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = x_1 - y_1$.
  iii) $f_3((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 4\,(x_1 x_2 + y_1 y_2)$.
  iv) $f_4((x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T) = 3\,(x_1 y_1 - x_2 y_2)$.

Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige symmetrische Matrix und entscheiden Sie, ob f_i positiv definit ist.

b) Es bezeichne $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ und U der von den Funktionen $f_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2, ..., n$ aufgespannte $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V. Bestimmen Sie die darstellende Matrix des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ bezüglich der Basis $f_0, f_1, ..., f_n$ von U.

Aufgabe 63

Beweisen oder widerlegen Sie: Jede symmetrische, reelle 2×2-Matrix ist diagonalisierbar.

Aufgabe 64

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Für $f, g \in V$ sei $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Gibt es ein Polynom der Form $p(x) = -x^4 + ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\langle p, q\rangle = 0$ für jedes Polynom $q \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 3 gilt?

Aufgabe 65

Gegeben sind die affinen Unterräume $A_1 = (1,0,0)^T + \langle (2,2,2)^T, (2,0,-2)^T\rangle$ und
$A_2 = (0,1,0)^T + \langle (2,2,0)^T, (0,0,2)^T\rangle$ von $\mathbb{R}^3$.
Gibt es eine Affinität $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die A_1 in die Ebene $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 2\}$ und A_2 in die Ebene $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2\}$ abbildet, und $f((1,1,1)^T) = (1,2,3)^T$ erfüllt?

Aufgabe 66

Liegen die Punkte $P_0 = (1,1,0)^T, P_1 = (1,2,3)^T$ und $P_2 = (1,3,6)^T$ von $\mathbb{R}^3$ auf einer Geraden? Bestimmen Sie gegebenenfalls das Teilverhältnis $\mathrm{TV}(P_0, P_1, P_2)$.

Aufgabe 67

a) Zeigen Sie, dass die Menge S aller reellen, symmetrischen $n \times n$-Matrizen einen Untervektorraum des Vektorraums M aller reellen $n \times n$-Matrizen bildet.

b) Welche Dimension hat S?

c) Ist $\phi : M \times M \to \mathbb{R}$, mit $\phi(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt auf M?

d) Ist $\phi : S \times S \to \mathbb{R}$, mit $\phi(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt auf S?

Aufgabe 68

Sei A eine $n \times n$-Matrix und S der Vektorraum aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Wir definieren eine Abbildung $\psi_A : S \to S, \psi_A(N) = A^T NA$.

a) Zeigen Sie, dass ψ_A eine wohldefinierte, lineare Abbildung ist.

b) Für welche A ist ψ_A eine Bijektion?

Aufgabe 69*

Gibt es vier Punkte in $\mathbb{R}^2$, so dass der Abstand zwischen jeweils zwei verschiedenen Punkten eine ungerade ganze Zahl ist? (Hier ist der euklidische Abstand im $\mathbb{R}^2$ gemeint, also $\|(x_1, x_2)^T - (y_1, y_2)^T\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$).

Abgabe: 29./30. Juni 2016 in den Übungsgruppen