Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2

SS 2016

Blatt 1

Diskussionsaufgaben sind mit * markiert.

Aufgabe 1 (schriftlich)

a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $ggT(x)$ der Polynome $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ und $g(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$ in $\mathbb{R}[x]$ und finden Sie Polynome $u(x)$ und $v(x)$ mit $ggT(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

b) Sei R der Ring aller 2×2-Matrizen über dem endlichen Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle Einheiten und alle Nullteiler in diesem Ring. Wieviele Teilringe mit weniger als 4 Elementen hat R?

c) Seien a, b reelle Zahlen und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Sei O_n die $n \times n$-Matrix mit jedem Eintrag gleich Eins. Sei $A_n := (a - b)E_n + bO_n$, wenn E_n die Einheitsmatrix bezeichnet. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_n. Für welche a, b ist A_n invertierbar? Bestimmen Sie die Inverse, falls diese existiert.

d) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und c eine beliebige komplexe Zahl. Sei $A = (a_{i,j})_{i,j}$ die Matrix mit $a_{i,i} = c$ für alle $i = 1, 2, .., n$, $a_{i,i+1} = 1$ für alle $i = 1, 2, .., n - 1$ und $a_{i,j} = 0$ sonst. Bestimmen Sie A^m, Kern(A^m) und Bild(A^m) für jede natürliche Zahl m in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 2

a) Schreiben Sie folgende Polynome als Produkt von Faktoren mit möglichst kleinem Grad, und zwar jeweils in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ und $\mathbb{C}[x]$: x, $x^2 - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 + x + 1$, $x^4 + 4$.

b) Sei $f(x)$ ein Polynom über einem Körper K mit $\mathbb{Q} \subseteq K$, das in Linearfaktoren zerfällt, und nicht das Nullpolynom ist. Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von f genau dann einfach sind, wenn $f(x)$ und $f'(x)$ teilerfremd sind.

Aufgabe 3

Sei V_n der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$.

a) Sei $(P_n(x))_{n \geq 0}$ eine Folge von Polynomen mit $Grad(P_n(x)) = n$ und $P_0(x) \neq 0$. Zeigen Sie für jedes $n \geq 0$, dass $\{P_i(x) | i = 0, 1, .., n\}$ eine Basis von V_n bildet.

b) Sei $P_n(x) := x^n$ und $Q_n(x) := (1+x)^n$ für $n \geq 0$. Finden Sie die Basiswechselmatrizen zwischen diesen Basen von V_n. Finden Sie die Basiswechselmatrizen auch für die Basen $P_n(x)$ und $T_n(x) := (x-1)^n$, $n \geq 0$.

c) Finden Sie die Inverse der $(n+1) \times (n+1)$ Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j}$ mit $a_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$ für $i \geq j$ und $a_{i,j} = 0$ sonst.

d) Sei nun $n \geq 1$. Sei $\phi : V_n \to V_n$ die Abbildung mit $\phi(f(x)) = f'(x)$ und $\psi : V_n \to V_n$ die Abbildung mit $\psi(f(x)) = f(x+1)$. Zeigen Sie, dass ϕ und ψ lineare Abbildungen sind, und bestimmen Sie deren charakteristische Polynome, Eigenwerte und Eigenräume. Überprüfen Sie, ob ψ und ϕ diagonalisierbar sind.

e*) Sei N eine Menge mit n Elementen und R eine Menge mit r Elementen. Sei $Surj(N,R)$ die Menge aller surjektiven Abbildungen von N nach R. Wir definieren $S_{n,r}$ durch $|Surj(N,R)| = r!S_{n,r}$ mit $S_{0,0} := 1$ und $S_{0,k} := 0$ für alle $k > 0$.
Sei $R_n(x) := x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$, mit $R_0(x) := 1$. Zeigen Sie, dass $r^n = \sum_{k=0}^{r} S_{n,k} R_k(r)$. Geben Sie nun eine explizite Formel für $|Surj(N,R)|$ an.

Aufgabe 4

a) Sei $C = AB$ das Produkt zweier Matrizen A und B.
Zeigen Sie $Rang(C) \leq min(Rang(A), Rang(B))$.

b) Sei n eine positive natürliche Zahl. Eine Lineare Algebra Vorlesung wird von n Studenten besucht. Es werden ausschließlich Lerngruppen gebildet, die folgenden beiden Regeln genügen:

   i) Jede Lerngruppe muss eine ungerade Anzahl Studenten haben.

   ii) Zwei Lerngruppen haben immer eine gerade Anzahl von Studenten gemeinsam.

   Zeigen Sie, dass es höchstens n Lerngruppen geben kann.
   (Hinweis: Seien die Studenten mit $1, 2, ..., n$ nummeriert und seien $C_1, C_2, ..., C_m$ die Lerngruppen. Definieren Sie die $m \times n$-Matrix A mit Einträgen in F_2 (dem Körper mit 2 Elementen) wie folgt:
   $A = (a_{i,j})_{i,j}$, mit $a_{i,j} = 1$, falls $j \in C_i$, und $a_{i,j} = 0$ sonst. Was kann man über die Ränge von A und AA^T sagen?)

Aufgabe 5*

Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine Abbildung. Wir nennen f gemein, wenn $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in V$ gilt, aber nicht $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$.

a) Sei $K = \mathbb{C}$. Gibt es eine gemeine Abbildung?

b) Sei K ein endlicher Körper mit Primzahlordnung. Gibt es eine gemeine Abbildung?

c) Sei $K = \mathbb{R}$. Gibt es eine gemeine Abbildung?
