Name, Vorname:		Matrikel-Nummer:		Studiengang:	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/2	/7	/5	/4	/8	/10	/5	/4	/5	/59

Es gilt: $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: ______ **Gruppennr.:** ______

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $(z+1+\mathrm{i})^4 = -4$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid (k-2)^2 < 10\}, \qquad B = \left\{3 + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum und das Infimum von A und B:

$\sup A =$ ______ , $\inf A =$ ______ , $\sup B =$ ______ , $\inf B =$ ______ .

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ injektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\alpha))$.

$d =$ ______ , Begründung: ______

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1+t & -2 & 3 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$ [ ] , $M^{-1} =$ [ ]

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1-x_1 & -x_2 & 2-x_2 \\ 2x_1 & 1+2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$ ist linear.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gibt es Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $\det(AB) = \det(BC) = 1$, aber $\det(AC) = 0$? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 8 (*8 Punkte*) Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ und eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $b_2 = e_1 + 2e_2$, $b_3 = e_1$. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde bestimmt durch $\varphi(b_1) = e_1 - 4e_2 - e_3$, $\varphi(b_2) = 4e_1 - e_2 + 2e_3$, $\varphi(b_3) = e_2 + 2e_3$. Geben Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basen B im Urbild und E im Ziel sowie bezüglich der Basen E im Urbild und E im Ziel an:

$M_\varphi^{E,B} = \boxed{}$, $M_\varphi^{E,E} = \boxed{}$.

Aufgabe 9 (*10 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 3 & 2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren v_k vom M. Sei A die mit M gebildete Blockmatrix $A = \left(\begin{array}{c|c} 2M & 0 \\ \hline 0 & -M \end{array}\right)$. Bestimmen Sie dann Eigenwerte μ_ℓ, Eigenvektoren w_ℓ und Diagonalform D von A.

$\chi_M(t) = \boxed{}$, $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$

v_1 zu λ_1	v_2 zu λ_2

,

$\mu_1 = \boxed{}$, $\mu_3 = \boxed{}$,

$\mu_2 = \boxed{}$, $\mu_4 = \boxed{}$,

w_1 zu μ_1	w_2 zu μ_2	w_3 zu μ_3	w_4 zu μ_4

, $D = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x+y$ gerade ist. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

$\boxed{}$, $d = \boxed{}$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Seien $f, g : V \to V$ linear. Es gelte $f(-2u) = 3v$ und $g(-v) = -3u$ für $u, v \neq 0$. Geben Sie je einen Eigenwert λ_1 bzw. λ_2 und je einen zugehörigen Eigenvektor w_1 bzw. w_2 der Kompositionen $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ an.

$\lambda_1 = \boxed{}$, $w_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $w_2 = \boxed{}$.

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ sowie $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ einen Eigenwert -1, so hat f^3 einen Eigenwert 1.

$\boxed{}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/2	/7	/5	/4	/8	/10	/5	/4	/5	/59

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

Es gilt: $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $(z - 1 + \mathrm{i})^4 = -4$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid (k+2)^2 < 10\}, \qquad B = \left\{3 - \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum und das Infimum von A und B:

$\sup A =$ ☐ , $\inf A =$ ☐ , $\sup B =$ ☐ , $\inf B =$ ☐ .

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ injektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\alpha))$.

$d =$ ☐ , Begründung: ☐

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1+t & -2 & 0 \\ -1 & t & 2 \\ 0 & 0 & 4-t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$ ☐ , $M^{-1} =$ ☐

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1-x_1 & -x_2 & 2-x_2 \\ 2x_1 & 1+2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$ ist linear.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gibt es Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $\det(AB) = \det(BC) = 1$, aber $\det(AC) = 0$? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 8 (*8 Punkte*) Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ und eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $b_2 = e_1 + 2e_2$, $b_3 = e_1$. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde bestimmt durch $\varphi(b_1) = -4e_1 + e_2 + e_3$, $\varphi(b_2) = -e_1 + 4e_2 - 2e_3$, $\varphi(b_3) = e_1 - 2e_3$. Geben Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basen B im Urbild und E im Ziel sowie bezüglich der Basen E im Urbild und E im Ziel an:

$M_\varphi^{E,B} = \boxed{}$, $M_\varphi^{E,E} = \boxed{}$.

Aufgabe 9 (*10 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 4 & 2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren v_k vom M. Sei A die mit M gebildete Blockmatrix $A = \left(\begin{array}{c|c} 2M & 0 \\ \hline 0 & -2M \end{array}\right)$. Bestimmen Sie dann Eigenwerte μ_ℓ, Eigenvektoren w_ℓ und Diagonalform D von A.

$\chi_M(t) = \boxed{}$, $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$

v_1 zu λ_1	v_2 zu λ_2

$\mu_1 = \boxed{}$, $\mu_3 = \boxed{}$,

$\mu_2 = \boxed{}$, $\mu_4 = \boxed{}$,

w_1 zu μ_1	w_2 zu μ_2	w_3 zu μ_3	w_4 zu μ_4

$, D = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x + y$ gerade ist. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

$, \; d = \boxed{}$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Seien $f, g : V \to V$ linear. Es gelte $f(-3u) = 4v$ und $g(-v) = -2u$ für $u, v \neq 0$. Geben Sie je einen Eigenwert λ_1 bzw. λ_2 und je einen zugehörigen Eigenvektor w_1 bzw. w_2 der Kompositionen $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ an.

$\lambda_1 = \boxed{}, \; w_1 = \boxed{}, \; \lambda_2 = \boxed{}, \; w_2 = \boxed{}.$

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ sowie $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ einen Eigenwert -1, so hat f^3 einen Eigenwert 1.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/2	/7	/5	/4	/8	/10	/5	/4	/5	/59

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

Es gilt: $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $(z + 1 - \mathrm{i})^4 = -4$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid (k-2)^2 < 18\}, \qquad B = \left\{ -3 + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum und das Infimum von A und B:

$\sup A =$ $\boxed{}$, $\inf A =$ $\boxed{}$, $\sup B =$ $\boxed{}$, $\inf B =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ injektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\alpha))$.

$d =$ $\boxed{}$, Begründung: $\boxed{}$

Aufgabe 5 (7 *Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} t & -2 & -3 \\ -1 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$ $\boxed{}$, $M^{-1} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 6 (5 *Punkte*) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1-x_1 & -x_2 & 2-x_2 \\ 2x_1 & 1+2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$ ist linear.

Aufgabe 7 (4 *Punkte*) Gibt es Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $\det(AB) = \det(BC) = 1$, aber $\det(AC) = 0$? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 8 (*8 Punkte*) Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ und eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $b_2 = e_1 + 2e_2$, $b_3 = e_1$. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde bestimmt durch $\varphi(b_1) = -e_1 + 4e_2 + e_3$, $\varphi(b_2) = 2e_1 + e_2 + 4e_3$, $\varphi(b_3) = 2e_1 - e_2$. Geben Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basen B im Urbild und E im Ziel sowie bezüglich der Basen E im Urbild und E im Ziel an:

$M_\varphi^{E,B} = \boxed{}$, $M_\varphi^{E,E} = \boxed{}$.

Aufgabe 9 (*10 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren v_k vom M. Sei A die mit M gebildete Blockmatrix $A = \left(\begin{array}{c|c} -M & 0 \\ \hline 0 & 2M \end{array}\right)$. Bestimmen Sie dann Eigenwerte μ_ℓ, Eigenvektoren w_ℓ und Diagonalform D von A.

$\chi_M(t) = \boxed{}$, $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$

v_1 zu λ_1	v_2 zu λ_2

$\mu_1 = \boxed{}$, $\mu_3 = \boxed{}$,

$\mu_2 = \boxed{}$, $\mu_4 = \boxed{}$,

w_1 zu μ_1	w_2 zu μ_2	w_3 zu μ_3	w_4 zu μ_4

, $D = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x+y$ gerade ist. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

, $d =$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Seien $f, g : V \to V$ linear. Es gelte $f(-2v) = -3u$ und $g(-u) = -3v$ für $u, v \neq 0$. Geben Sie je einen Eigenwert λ_1 bzw. λ_2 und je einen zugehörigen Eigenvektor w_1 bzw. w_2 der Kompositionen $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ an.

$\lambda_1 =$, $w_1 =$, $\lambda_2 =$, $w_2 =$.

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ sowie $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ einen Eigenwert -1, so hat f^3 einen Eigenwert 1.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punkte	/1	/4	/4	/2	/7	/5	/4	/8	/10	/5	/4	/5	/59

Es gilt: $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: ☐ **Gruppennr.:** ☐

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $(z-1-\mathrm{i})^4 = -4$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten

Aufgabe 3 (*4 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{k \in \mathbb{Z} \mid (k+2)^2 < 18\}, \qquad B = \left\{-3 - \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum und das Infimum von A und B:

$\sup A =$ ☐ , $\inf A =$ ☐ , $\sup B =$ ☐ , $\inf B =$ ☐ .

Aufgabe 4 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ injektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\alpha))$.

$d =$ ☐ , Begründung: ☐

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} t & -2 & 0 \\ -1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & 5-t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$ $\boxed{}$, $M^{-1} =$ $\boxed{}$

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1-x_1 & -x_2 & 2-x_2 \\ 2x_1 & 1+2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$ ist linear.

Aufgabe 7 (*4 Punkte*) Gibt es Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $\det(AB) = \det(BC) = 1$, aber $\det(AC) = 0$? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 8 (*8 Punkte*) Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ und eine Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, $b_2 = e_1 + 2e_2$, $b_3 = e_1$. Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ werde bestimmt durch $\varphi(b_1) = -e_1 - e_2 - 4e_3$, $\varphi(b_2) = -4e_1 + 2e_2 - e_3$, $\varphi(b_3) = 2e_2 + e_3$. Geben Sie die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basen B im Urbild und E im Ziel sowie bezüglich der Basen E im Urbild und E im Ziel an:

$M_\varphi^{E,B} = \boxed{}$, $M_\varphi^{E,E} = \boxed{}$.

Aufgabe 9 (*10 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 4 & -\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren v_k vom M. Sei A die mit M gebildete Blockmatrix $A = \left(\begin{array}{c|c} -2M & 0 \\ \hline 0 & 2M \end{array}\right)$. Bestimmen Sie dann Eigenwerte μ_ℓ, Eigenvektoren w_ℓ und Diagonalform D von A.

$\chi_M(t) = \boxed{}$, $\lambda_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$

v_1 zu λ_1	v_2 zu λ_2

, $\mu_1 = \boxed{}$, $\mu_3 = \boxed{}$,

$\mu_2 = \boxed{}$, $\mu_4 = \boxed{}$,

w_1 zu μ_1	w_2 zu μ_2	w_3 zu μ_3	w_4 zu μ_4

, $D = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*) Für $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x+y$ gerade ist. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

$\boxed{}$, $d = \boxed{}$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Seien $f, g : V \to V$ linear. Es gelte $f(-3v) = -4u$ und $g(-u) = -2v$ für $u, v \neq 0$. Geben Sie je einen Eigenwert λ_1 bzw. λ_2 und je einen zugehörigen Eigenvektor w_1 bzw. w_2 der Kompositionen $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ an.

$\lambda_1 = \boxed{}$, $w_1 = \boxed{}$, $\lambda_2 = \boxed{}$, $w_2 = \boxed{}$.

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ sowie $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ einen Eigenwert -1, so hat f^3 einen Eigenwert 1.

$\boxed{}$
