Aufgabe 1

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die bei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum hat. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

☒ wahr ◯ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann liegt an der Stelle x_0 ein lokales Extremum von f vor.

◯ wahr ☒ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Angenommen f ist monoton fallend auf $(-\infty, x_0]$ und monoton wachsend auf $[x_0, +\infty)$. Dann liegt an der Stelle x_0 ein lokales Minimum vor.

☒ wahr ◯ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei f monoton wachsend auf $(-\infty, x_0]$ und monoton fallend auf $[x_0, +\infty)$. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

☒ wahr ◯ falsch

Aufgabe 2

Sei $f\colon [4,9] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(4,9)$ differenzierbar mit $f(4) = 3$ und $f'(x) \leq 7$ für alle $x \in (4,9)$. Dann ist der maximal mögliche Wert von $f(9) = \boxed{38}$.

Sei $f\colon [3,7] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(3,7)$ differenzierbar mit $f(3) = 8$ und $f'(x) \leq 3$ für alle $x \in (3,7)$. Dann ist der maximal mögliche Wert von $f(7) = \boxed{20}$.

Sei $f\colon [3,7] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(3,7)$ differenzierbar mit $f(3) = 7$ und $f'(x) \geq 3$ für alle $x \in (3,7)$. Dann ist der minimal mögliche Wert von $f(7) = \boxed{19}$.

Sei $f\colon [5,10] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(5,10)$ differenzierbar mit $f(5) = 15$ und $f'(x) \geq -2$ für alle $x \in (5,10)$. Dann ist der minimal mögliche Wert von $f(7) = \boxed{11}$.

Aufgabe 3

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f' + g' = 0$. Dann gilt $f(x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

○ wahr ⊗ falsch

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f' + g' = 0$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -g(x) + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

⊗ wahr ○ falsch

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f' + g' = 0$. Dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

○ wahr ⊗ falsch

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f' + g' = 0$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -g(x) - c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 4

Tragen Sie entweder eine Zahl ein oder kreuzen Sie *existiert nicht* an, wenn der Grenzwert nicht existiert.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{6\cos(x)}{\pi - 2x} = \boxed{3}$, existiert nicht ☐

Tragen Sie entweder eine Zahl ein oder kreuzen Sie *existiert nicht* an, wenn der Grenzwert nicht existiert.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5\sin(x) + x}{3x} = \boxed{2}$, existiert nicht ☐

Tragen Sie entweder eine Zahl ein oder kreuzen Sie *existiert nicht* an, wenn der Grenzwert nicht existiert.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{8\cos(x)}{2\pi - 4x} = \boxed{2}$, existiert nicht ☐

Tragen Sie entweder eine Zahl ein oder kreuzen Sie *existiert nicht* an, wenn der Grenzwert nicht existiert.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\sin(x) + 2x}{2x} = \boxed{3}$, existiert nicht ☐

Aufgabe 5

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist stetig.

○ wahr ☒ falsch

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ist stetig.

☒ wahr ○ falsch

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ ist stetig.

○ wahr ☒ falsch

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ ist stetig.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 6

Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x^2 - 1|$ hat ein lokales Maximum bei $x_0 = 0$.

☒ wahr ○ falsch

Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x^2 - 1|$ hat ein lokales Minimum bei $x_0 = 0$.

○ wahr ☒ falsch

Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x^2 - 1|$ ist nicht differenzierbar an $x_0 = 0$.

○ wahr ☒ falsch

Die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x^2 - 1|$ hat genau ein lokales Extremum.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x - zy) = f(x) - zf(y)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und es existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

☒ wahr ◯ falsch

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x - zy) = f(x) - zf(y)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und hat keine lokalen Extrema.

☒ wahr ◯ falsch

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x - zy) = f(x) - zf(y)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig, aber im Allgemeinen nicht überall differenzierbar.

◯ wahr ☒ falsch

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x - zy) = f(x) - zf(y)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $f(1) \neq 0$. Dann ist f differenzierbar und bijektiv.

☒ wahr ◯ falsch

Aufgabe 8

Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{x}{1+x}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f $n-$mal differenzierbar und es gilt $f^{(n)}(2) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{3^{n+1}}$.

☒ wahr ◯ falsch

Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \frac{x}{1+x}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f $n-$mal differenzierbar und es gilt $|f^{(n)}(2)| \leq 1$.

◯ wahr ☒ falsch

Aufgabe 9

Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x}{1+x}$ und sei $T_2(f, x, 2) = \sum_{k=0}^{2} a_k(x-2)^k$ das zweite Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. Dann gilt $a_k > 0$ für $k = 0, 1, 2$.

◯ wahr ☒ falsch

Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x}{1+x}$ und sei $T_2(f, x, 2) = \sum_{k=0}^{2} a_k (x-2)^k$ das zweite Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. Dann gilt $a_0 + a_1 + a_2 < 1$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x}{1+x}$ und sei $T_2(f, x, 2) = \sum_{k=0}^{2} a_k (x-2)^k$ das zweite Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. Dann gilt $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 > 0$.

○ wahr ☒ falsch

Sei $f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \frac{x}{1+x}$ und sei $T_2(f, x, 2) = \sum_{k=0}^{2} a_k (x-2)^k$ das zweite Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$. Dann gilt $a_0 > a_1 > a_2$.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 10

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2 + 2x + 2$. Dann wird f durch die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ mit $a_k = 2$ für $k \leq 2$ und $a_k = 0$ für $k \geq 3$ beschrieben.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 4x^2 + 2x + 2$. Dann wird f durch die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \cdot x^k$ mit $b_k = 2$ für alle k beschrieben.

○ wahr ☒ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 6x^2 + 3x + 2$. Dann wird f durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-2)^k$ mit $a_0 = 32$, $a_1 = 27$, $a_2 = 6$ und $a_k = 0$ für $k \geq 3$ beschrieben.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 6x^2 + 3x + 2$. Dann wird f durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-2)^k$ mit $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, und $a_k = 0$ für $k \geq 3$ beschrieben.

○ wahr ☒ falsch