Aufgabe 1

Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 + 6\sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt:

$f'(\xi) = \boxed{0}\,\xi^3 + \boxed{0}\,\xi^2 + \boxed{6}\,\xi + \boxed{0} + \boxed{0}\,\sqrt{\xi} + \boxed{3}\,\frac{1}{\sqrt{\xi}}.$

Tragen Sie ganze Zahlen (ohne Klammern um negative Zahlen) ein. Tragen Sie 0 ein, wenn der entsprechende Term nicht auftritt.

Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x - 4\sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt:

$f'(\xi) = \boxed{0}\,\xi^3 + \boxed{0}\,\xi^2 + \boxed{0}\,\xi + \boxed{5} + \boxed{0}\,\sqrt{\xi} + \boxed{-2}\,\frac{1}{\sqrt{\xi}}.$

Tragen Sie ganze Zahlen (ohne Klammern um negative Zahlen) ein. Tragen Sie 0 ein, wenn der entsprechende Term nicht auftritt.

Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + 8\sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt:

$f'(\xi) = \boxed{0}\,\xi^3 + \boxed{0}\,\xi^2 + \boxed{4}\,\xi + \boxed{0} + \boxed{0}\,\sqrt{\xi} + \boxed{4}\,\frac{1}{\sqrt{\xi}}.$

Tragen Sie ganze Zahlen (ohne Klammern um negative Zahlen) ein. Tragen Sie 0 ein, wenn der entsprechende Term nicht auftritt.

Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 7x - 10\sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt:

$f'(\xi) = \boxed{0}\,\xi^3 + \boxed{0}\,\xi^2 + \boxed{0}\,\xi + \boxed{7} + \boxed{0}\,\sqrt{\xi} + \boxed{-5}\,\frac{1}{\sqrt{\xi}}.$

Tragen Sie ganze Zahlen (ohne Klammern um negative Zahlen) ein. Tragen Sie 0 ein, wenn der entsprechende Term nicht auftritt.

Aufgabe 2

Seien $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x$, $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $(f \cdot g)'(\xi) = \frac{5}{2\sqrt{\xi}}$.

○ wahr ☒ falsch

Seien $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 7x$, $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $(f \cdot g)'(\xi) = \frac{7}{2\sqrt{\xi}}$.

○ wahr ☒ falsch

Seien $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5x$, $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $(f \cdot g)'(\xi) = 5\sqrt{\xi} + \frac{5\xi}{2\sqrt{\xi}}$.

☒ wahr ○ falsch

Seien $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$, $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 7\sqrt{x}$ und $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $(f \cdot g)'(\xi) = \sqrt{\xi} + \frac{7}{2\sqrt{\xi}}$.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 3

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(\xi) = \frac{(f \cdot g')(\xi) - (g \cdot f')(\xi)}{(f^2)(\xi)}$$

☒ immer wahr ○ manchmal auch falsch

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(\xi) = \frac{(f \cdot g')(\xi) - (f' \cdot g)(\xi)}{(f^2)(\xi)}$$

☒ immer wahr ○ manchmal auch falsch

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(\xi) = \frac{(f' \cdot g)(\xi) - (f \cdot g')(\xi)}{(f^2)(\xi)}$$

○ immer wahr ☒ manchmal auch falsch

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(\xi), g(\xi) \neq 0$. Dann gilt:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(\xi) = \frac{(f' \cdot g)(\xi) - (f \cdot g')(\xi)}{(g^2)(\xi)}$$

○ immer wahr ☒ manchmal auch falsch

Aufgabe 4

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig und an $\xi \in I$ differenzierbar mit $f'(\xi) \neq 0$. Dann existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf $f(I)$ und ist an $\eta = f(\xi)$ differenzierbar mit $(f^{-1})(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$.

○ immer wahr ☒ manchmal auch falsch

Sei $\xi \in \mathbb{R}$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Dann gilt $f'(\xi) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{\xi})^2}$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ streng monoton und stetig und an $\xi \in I$ differenzierbar mit $f'(\xi) \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{f}$ an $\eta = f(\xi)$ differenzierbar mit $\left(\frac{1}{f}\right)'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}$.

○ immer wahr ☒ manchmal auch falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Sei $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt $\left(\frac{1}{f}\right)'(\eta) = \frac{1}{3 \cdot \left(\frac{1}{\eta^3}\right)^2}$.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 5

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.

☒ wahr ○ falsch

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-2)^n$ hat keine konvergente Teilfolge.

☒ wahr ○ falsch

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ hat keine konvergente Teilfolge.

○ wahr ☒ falsch

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-\frac{1}{2})^n$ hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 6

Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{3+5a_n}{20}$ konvergiert.

☒ wahr ◯ falsch

Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{3+5a_n}{20}$ hat genau zwei verschiedene Häufungspunkte.

◯ wahr ☒ falsch

Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{3+5a_n}{20}$ ist beschränkt.

☒ wahr ◯ falsch

Die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{3+5a_n}{20}$ konvergiert gegen 2.

◯ wahr ☒ falsch

Aufgabe 7

Die Reihe $\sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$ konvergiert gegen $-\frac{1}{24}$.

☒ wahr ◯ falsch

Die Reihe $\sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$ konvergiert gegen 1.

◯ wahr ☒ falsch

Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{2\cdot 4^k}$ konvergiert gegen $\frac{9}{2}$.

☒ wahr ◯ falsch

Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{2\cdot 4^k}$ konvergiert gegen 4.

◯ wahr ☒ falsch

Aufgabe 8

Die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{2}{(k-1)!}$ konvergiert gegen $2e-1$.

○ wahr ⊗ falsch

Die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{2}{(k-1)!}$ konvergiert gegen $2e-2$.

⊗ wahr ○ falsch

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)!}$ konvergiert gegen $2e-2$.

○ wahr ⊗ falsch

Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)!}$ konvergiert gegen $2e-4$.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 9

Gegeben ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wenn $\exists \varepsilon > 0$ sodass $\forall \delta > 0$ und $\forall x, y \in [0,1] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, dann ist f stetig.

○ wahr ⊗ falsch

Gegeben ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wenn $\exists d > 0$ sodass $\forall x, y \in [0,1] : |f(x) - f(y)| \leq d \cdot |x-y|$, dann ist f stetig.

⊗ wahr ○ falsch

Gegeben ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wenn $\exists \delta > 0$ sodass $\forall \varepsilon > 0$ und $\forall x, y \in [0,1] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, dann ist f stetig.

⊗ wahr ○ falsch

Gegeben ist die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wenn $\exists d > 0$ sodass $\forall x, y \in [0,1] : |f(x) - f(y)| \geq d \cdot |x-y|$, dann hat f mindestens eine Sprungstelle im Intervall $(0,1)$.

○ wahr ⊗ falsch

Aufgabe 10

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Dann $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

☒ wahr ○ falsch

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Dann $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

○ wahr ☒ falsch

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) \cdot g(a) = -f(b) \cdot g(b)$. Dann $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

○ wahr ☒ falsch

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) = g(b)$ und $f(b) = g(a)$. Dann $\exists x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

☒ wahr ○ falsch