Aufgabe 1

Jede symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum V ist ein Skalarprodukt.

◯ wahr ⊗ falsch

Jedes Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine symmetrische Bilinearform.

⊗ wahr ◯ falsch

Aufgabe 2

Sei V ein euklidischer Vektorraum und A eine orthogonale Matrix. Falls die Vektoren v und w orthogonal zueinander sind, so gilt dies auch für die Vektoren Av und Aw.

⊗ wahr ◯ falsch

Sei V ein euklidischer Vektorraum und A eine orthogonale Matrix. Falls der Vektor v normiert ist, so ist auch der Vektor Av normiert.

⊗ wahr ◯ falsch

Sei V ein euklidischer Vektorraum und A eine orthogonale Matrix. Dann ist auch die Matrix $A + A$ orthogonal.

◯ wahr ⊗ falsch

Sei V ein euklidischer Vektorraum und A eine orthogonale Matrix. Dann ist auch die Matrix A^2 orthogonal.

⊗ wahr ◯ falsch

Aufgabe 3

Falls die Matrix M symmetrisch ist, so ist auch die Matrix M^2 symmetrisch.

⊗ wahr ◯ falsch

Falls die Matrix M^2 symmetrisch ist, so ist auch die Matrix M symmetrisch.

◯ wahr ⊗ falsch

Summen symmetrischer Matrizen sind stets wieder symmetrisch.

⊗ wahr ◯ falsch

Produkte symmetrischer Matrizen sind stets wieder symmetrisch.

○ wahr ⊗ falsch

Aufgabe 4

Jede symmetrische Matrix über $\mathbb{R}$ ist die darstellende Matrix einer orthogonalen Abbildung.

○ wahr ⊗ falsch

Jede symmetrische Matrix über $\mathbb{R}$ ist die darstellende Matrix einer symmetrischen Bilinearform.

⊗ wahr ○ falsch

Jede symmetrische Matrix über $\mathbb{R}$ ist die darstellende Matrix eines Skalarproduktes.

○ wahr ⊗ falsch

Jede symmetrische Matrix über $\mathbb{R}$ ist zugleich auch orthogonal.

○ wahr ⊗ falsch

Aufgabe 5

Sei U eine hermitesche und unitäre Matrix über $\mathbb{C}$. Dann ist U^2 die Einheitsmatrix.

⊗ wahr ○ falsch

Sei U eine hermitesche und unitäre Matrix über $\mathbb{C}$. Dann gilt stets $U^2 = U$.

○ wahr ⊗ falsch

Sei U eine hermitesche und unitäre Matrix über $\mathbb{C}$. Dann können nur $+1$ und -1 als Eigenwerte von U auftreten.

⊗ wahr ○ falsch

Sei U eine hermitesche und unitäre Matrix über $\mathbb{C}$. Dann hat U maximal zwei verschiedene Eigenwerte.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 6

Sei $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathtt{i} & 0 & \mathtt{i} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist A unitär.

☒ wahr ○ falsch

Sei $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathtt{i} & 0 & \mathtt{i} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist A hermitesch.

○ wahr ☒ falsch

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-\mathtt{i} & -3\mathtt{i} \\ 2+\mathtt{i} & 0 & 1-\mathtt{i} \\ 3\mathtt{i} & 1+\mathtt{i} & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist A unitär.

○ wahr ☒ falsch

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-\mathtt{i} & -3\mathtt{i} \\ 2+\mathtt{i} & 0 & 1-\mathtt{i} \\ 3\mathtt{i} & 1+\mathtt{i} & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist A hermitesch.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 7

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann ist A die darstellende Matrix eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dann bilden die Spalten von A eine Orthonormalbasis.

○ wahr ☒ falsch

Sei $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist A orthogonal.

☒ wahr ○ falsch

Sei $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist A die darstellende Matrix eines Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^3$.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 8

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ unitär. Dann ist A diagonalisierbar.

☒ wahr ○ falsch

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesch. Dann ist A diagonalisierbar.

☒ wahr ○ falsch

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ orthogonal. Dann ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 9

Sei durch $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der Polynome gegeben. Dann sind $f(x) = x$ und $g(x) = 4x^2 - 2x$ bzgl. dieses Skalarprodukts orthogonal.

○ wahr ☒ falsch

Sei durch $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der Polynome gegeben. Dann sind $f(x) = x$ und $g(x) = 4x^2 + 2$ bzgl. dieses Skalarprodukts orthogonal.

☒ wahr ○ falsch

Sei durch $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der Polynome gegeben. Dann sind $f(x) = x$ und $g(x) = 3x^2 + x$ bzgl. dieses Skalarprodukts orthogonal.

○ wahr ☒ falsch

Sei durch $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der Polynome gegeben. Dann sind $f(x) = x$ und $g(x) = 3x^2 + 1$ bzgl. dieses Skalarprodukts orthogonal.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 10

Für Polynome f und g in $\mathbb{R}[x]$ definieren wir $\langle f, g \rangle := f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$. Diese Bilinearform ist positiv definit.

○ wahr ⊗ falsch

Für Polynome f und g in $\mathbb{R}[x]$ definieren wir $\langle f, g \rangle := f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$. Diese Bilinearform ist symmetrisch.

⊗ wahr ○ falsch
