Aufgabe 1

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für jedes $v \in \mathbb{R}^3$ sei die Abbildung $f_v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_v(t) = f(tv)$ stetig in 0. Dann ist f stetig in $(0,0,0)$.

○ wahr ⊗ falsch

Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien die Abbildungen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f((x,0))$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f((0,y))$ stetig in 0. Dann ist auch f stetig in $(0,0)$.

○ wahr ⊗ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ sei die Abbildung $f_v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_v(t) = f(tv)$ stetig in 0. Dann ist f stetig in $(0,0)$.

○ wahr ⊗ falsch

Für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien die Abbildungen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f((x,0,0))$, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f((0,y,0))$, und $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto f((0,0,z))$ stetig in 0. Dann ist auch f stetig in $(0,0,0)$.

○ wahr ⊗ falsch

Aufgabe 2

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann konvergiert $T_n(f,v,v_0)$ für alle $v, v_0 \in \mathbb{R}^n$ für $n \to \infty$ gegen $f(v)$.

○ wahr ⊗ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann konvergiert $T_n(f,v,v_0)$ für alle $v, v_0 \in \mathbb{R}^n$ für $n \to \infty$ gegen $f(v)$.

○ wahr ⊗ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j$ für $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $m, r \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $T_n(f,(x,y),(x_0,y_0))$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ für $n \to \infty$ gegen $f(x,y)$

⊗ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j$ für $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $m, r \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $T_n(f,(x,y),(x_0,y_0))$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ für $n \to \infty$ gegen $f(x,y)$

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 3

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad}(f) = (1,1,1)$. Dann ist die Einschränkung der Funktion f konstant auf jeder Ebene der Form $x+y+z=d$ für ein $d \in \mathbb{R}$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differentierbare Funktion mit $\operatorname{grad} f = (1,-1,1)$. Dann ist die Einschränkung der Funktion f konstant auf jeder Ebene der Form $-x+y-z=d$ für ein $d \in \mathbb{R}$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\operatorname{grad} f = (1,1,1)$. Dann existiert eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f((x,y,z)) = g(x+y+z)$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f = (1,2,1)$. Dann existiert eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f((x,y,z)) = g(2x+y+2z)$.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 4

Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt $f \in O(g)$ im Punkt 0.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ und $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann gilt $g \in O(f)$ im Punkt 0.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) - 1$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Dann gilt $f \in o(g)$ im Punkt 0.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) - 1$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Dann gilt $g \in o(f)$ im Punkt 0.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 5

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2y, 3y)$. Dann gilt:

$$J(f)(4, 5) = \begin{pmatrix} \boxed{40} & \boxed{16} \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2y, 3y)$. Dann gilt:

$$J(f)(5, 4) = \begin{pmatrix} \boxed{40} & \boxed{25} \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2y, 3y)$. Dann gilt:

$$J(f)(2, 7) = \begin{pmatrix} \boxed{28} & \boxed{4} \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2y, 3y)$. Dann gilt:

$$J(f)(7, 2) = \begin{pmatrix} \boxed{28} & \boxed{49} \\ \boxed{0} & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Sei $f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{3y}{x}$. Dann gilt:

$$H(f)(\tfrac{1}{2}, 5) = \begin{pmatrix} \boxed{240} & \boxed{-12} \\ \boxed{-12} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Sei $f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{5y}{x}$. Dann gilt:

$$H(f)(\tfrac{1}{2}, 3) = \begin{pmatrix} \boxed{240} & \boxed{-20} \\ \boxed{-20} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Sei $f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{3x}{y}$. Dann gilt:

$$H(f)(5, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-12} \\ \boxed{-12} & \boxed{240} \end{pmatrix}$$

Sei $f\colon \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{5x}{y}$. Dann gilt:

$$H(f)(3, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{-20} \\ \boxed{-20} & \boxed{240} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5(x-2)^2(y+1) + 3(x-2)(y+1) + x + y + 3$.

Dann ist das Taylorpolynom erster Stufe im Punkt $(2,-1)$ gegeben durch $T_1(f,(x,y),(2,-1)) = \boxed{} \cdot (x-2) + \boxed{1} \cdot (y+1) + \boxed{4} \cdot 1$.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5(x-2)^2(y+1) + 7(x-2)(y+1) + x + y + 4$.

Dann ist das Taylorpolynom erster Stufe im Punkt $(2,-1)$ gegeben durch $T_1(f,(x,y),(2,-1)) = \boxed{} \cdot (x-2) + \boxed{1} \cdot (y+1) + \boxed{5} \cdot 1$.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2(x-2)^2(y+1) + 7(x-2)(y+1) + x + y + 2$.

Dann ist das Taylorpolynom erster Stufe im Punkt $(2,-1)$ gegeben durch $T_1(f,(x,y),(2,-1)) = \boxed{} \cdot (x-2) + \boxed{1} \cdot (y+1) + \boxed{3} \cdot 1$.

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3(x-2)^2(y+1) + 7(x-2)(y+1) + x + y + 1$.

Dann ist das Taylorpolynom erster Stufe im Punkt $(2,-1)$ gegeben durch $T_1(f,(x,y),(2,-1)) = \boxed{} \cdot (x-2) + \boxed{1} \cdot (y+1) + \boxed{2} \cdot 1$.

Aufgabe 8

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x^2 y}$. Dann ist $\operatorname{grad} f = (2xy \cdot e^{x^2 y}, x^2 \cdot e^{x^2 y})$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x^2 y}$. Dann ist $\operatorname{grad} f = (y \cdot e^{x^2 y}, x^2 \cdot e^{x^2 y})$.

○ wahr ☒ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x^2 y)$. Dann ist $\operatorname{grad} f = (2xy\cos(x^2 y), x^2\cos(x^2 y))$.

☒ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x^2 y)$. Dann ist $\operatorname{grad} f = (2xy\sin(x^2 y), x^2\sin(x^2 y))$.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 9

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 3x + 5y$. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung $(7,0)$:

$\boxed{21}$ Alternative Lösung $\boxed{3}$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 7x + 5y$. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung $(3,0)$:

$\boxed{21}$ Alternative Lösung $\boxed{7}$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 3x + 5y$. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung $(0,7)$:

$\boxed{35}$ Alternative Lösung $\boxed{5}$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 3x + 7y$. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richtung $(0,5)$:

$\boxed{35}$ Alternative Lösung $\boxed{7}$

Alternative Lösung basiert auf der folgenden auch gebräuchlichen Definition der Richtungsableitung $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h \cdot |\vec{r}|}$.

Aufgabe 10

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x$ hat ein Minimum unter der Nebenbedingung $xy = 0$.

○ wahr ☒ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = e^x$ hat ein Maximum unter der Nebenbedingung $xy = 0$.

○ wahr ☒ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2$ hat ein Maximum unter der Nebenbedingung $xy = 0$.

○ wahr ☒ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ hat ein Minimum unter der Nebenbedingung $xy = 0$.

☒ wahr ○ falsch