Aufgabe 1

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis v_1, v_2, v_3. Dann existiert eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, die $v_1 + v_2 + v_3$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet.

☒ wahr ◯ falsch

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis v_1, v_2, v_3. Dann existiert eine invertierbare lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, die $v_1 + v_2 + v_3$ auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet.

◯ wahr ☒ falsch

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis v_1, v_2, v_3. Dann existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, die $v_1 + v_2 + v_3$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet.

☒ wahr ◯ falsch

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis v_1, v_2, v_3. Dann existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$, die $v_1 + v_2 + v_3$ auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abbildet.

☒ wahr ◯ falsch

Aufgabe 2

Sei K der Körper mit zwei Elementen. Die Anzahl der invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in K ist:

$\boxed{6}$

Sei K der Körper mit zwei Elementen. Die Anzahl der nicht-invertierbaren 2×2-Matrizen mit Einträgen in K ist:

$\boxed{10}$

Sei K der Körper mit zwei Elementen. Die Anzahl der 2×2-Matrizen mit Einträgen in K und Determinante 1 ist:

$\boxed{6}$

Sei K der Körper mit zwei Elementen. Die Anzahl der 2×2-Matrizen mit Einträgen in K und Determinante 0 ist:

$\boxed{10}$

Aufgabe 3

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_{10}$. Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ seien linear abhängig. Dann sind folgende Fälle für n möglich:

☒ $n < 10$ ☒ $n = 10$ ☒ $n > 10$

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_{10}$. Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ seien linear unabhängig. Dann sind folgende Fälle für n möglich:

☒ $n < 10$ ☒ $n = 10$ ☐ $n > 10$

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_{10}$. Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ seien ein Erzeugendensystem. Dann sind folgende Fälle für n möglich:

☐ $n < 10$ ☒ $n = 10$ ☒ $n > 10$

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_{10}$. Die Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in V$ seien eine Basis. Dann sind folgende Fälle für n möglich:

☐ $n < 10$ ☒ $n = 10$ ☐ $n > 10$

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Aufgabe 4

Das Produkt zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.

☒ wahr ○ falsch

Die Summe zweier invertierbarer Matrizen ist invertierbar.

○ wahr ☒ falsch

Die Komposition zweier linearer Abbildungen ist linear.

☒ wahr ○ falsch

Die Summe zweier linearer Abbildungen ist linear.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 5

Sei $n > 1$. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nicht injektiv. Dann gilt:

☐ $\dim \operatorname{Bild}(f) > 0$, ☒ $\dim \operatorname{Bild}(f) < n$, ☐ $\dim \operatorname{Bild}(f) = n$, ☐ $\dim \operatorname{Bild}(f) = n - 1$.

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Sei $n > 1$. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektiv. Dann gilt:

☒ $\dim \operatorname{Bild}(f) > 0$, ☐ $\dim \operatorname{Bild}(f) < n$, ☒ $\dim \operatorname{Bild}(f) = n$, ☐ $\dim \operatorname{Bild}(f) = n - 1$.

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Sei $n > 1$. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nicht surjektiv. Dann gilt:

☒ $\dim \operatorname{Kern}(f) > 0$, ☐ $\dim \operatorname{Kern}(f) < n$, ☐ $\dim \operatorname{Kern}(f) = n$, ☐ $\dim \operatorname{Kern}(f) = n - 1$.

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Sei $n > 1$. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\dim \operatorname{Bild}(f) = 1$. Dann gilt:

☒ $\dim \operatorname{Kern}(f) > 0$, ☒ $\dim \operatorname{Kern}(f) < n$, ☐ $\dim \operatorname{Kern}(f) = n$, ☒ $\dim \operatorname{Kern}(f) = n - 1$.

(Alle richtigen Antworten, und nur diese, sind anzukreuzen.)

Aufgabe 6

Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Die Abbildung $\operatorname{Mat}(n \times n, K) \to K$, die eine Matrix M auf ihre Determinante abbildet, ist bijektiv.

○ wahr ☒ falsch

Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Die Abbildung $\operatorname{Mat}(n \times n, K) \to K$, die eine Matrix M auf ihre Determinante abbildet, ist injektiv.

○ wahr ☒ falsch

Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Die Abbildung $\mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$, die eine Matrix M auf ihre Determinante abbildet, ist surjektiv.

☒ wahr ○ falsch

Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Die Abbildung $\mathrm{Mat}(n \times n, K) \to K$, die eine Matrix M auf ihre Determinante abbildet, ist linear.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 7

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ hat Determinante ...

$\boxed{2}$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 12 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ hat Determinante ...

$\boxed{1}$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ hat Determinante ...

$\boxed{2}$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ hat Determinante ...

$\boxed{0}$

Aufgabe 8

Wenn eine $n \times n$-Matrix M die Determinante 1 hat, dann ist M invertierbar.

☒ wahr ○ falsch

Wenn eine $n \times n$-Matrix die Determinante 1 hat, dann ist M die darstellende Matrix einer bijektiven linearen Abbildung.

⊗ wahr ○ falsch

Wenn eine $n \times n$-Matrix die Determinante 1 hat, dann sind die Spaltenvektoren linear unabhängig.

⊗ wahr ○ falsch

Wenn eine $n \times n$-Matrix die Determinante 1 hat, dann sind die Zeilenvektoren linear unabhängig.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 9

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ hat genau n verschiedene komplexe Eigenwerte.

○ wahr ⊗ falsch

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ hat einen komplexen Eigenwert.

⊗ wahr ○ falsch

Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ hat einen reellen Eigenwert.

○ wahr ⊗ falsch

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ hat einen reellen Eigenwert.

○ wahr ⊗ falsch

Aufgabe 10

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

○ wahr ⊗ falsch

Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ist äquivalent zu einer Diagonalmatrix.

⊗ wahr ○ falsch
