## Aufgabe 1

Die durch $a_n := \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases}$ definierte Folge hat einen Häufungspunkt.

◯ wahr ◯falsch

Die durch $a_n := \frac{n}{n+1} \cdot \mathrm{i}^{2n+1}$ definierte Folge komplexer Zahlen hat einen Häufungspunkt.

◯ wahr ◯falsch

Die durch $a_n := \frac{2n}{n+2} \sin(3n)$ definierte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.

◯ wahr ◯falsch

Die durch $a_n := (-1)^n \frac{n^2}{\sqrt{n}+1}$ definierte Folge hat einen Häufungspunkt.

◯ wahr ◯falsch

## Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\forall \varepsilon > 0\, \exists N, M \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N, \forall m \geq M : |a_n - a_m| < \varepsilon$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

◯ wahr ◯ falsch

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Definition genau dann eine Cauchy-Folge, wenn $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

◯ wahr ◯ falsch

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist.

◯ wahr ◯ falsch

Jede monotone beschränkte Folge reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

◯ wahr ◯ falsch

## Aufgabe 3

Sei $s_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^n a_k$.

○ immer wahr ○ manchmal auch falsch

Sei $s_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^n a_k^2$.

○ immer wahr ○ manchmal auch falsch

Sei $s_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^n |a_k|$.

○ immer wahr ○ manchmal auch falsch

Sei $s_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ eine konvergente Reihe. Dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^n a_k$.

○ immer wahr ○ manchmal auch falsch

## Aufgabe 4

Die Reihe $\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot \frac{1}{j^2}$ konvergiert.

○ wahr ○ falsch

Die Reihe $\sum_{j=1}^n (-1)^j$ konvergiert.

○ wahr ○ falsch

Die Reihe $\sum_{j=1}^n (-1)^j \cos(n\pi)$ konvergiert.

○ wahr ○ falsch

Die Reihe $\sum_{j=1}^n (-1)^{2j} \frac{1}{2j}$ konvergiert.

○ wahr ○ falsch

## Aufgabe 5

---

Sei $q \in \mathbb{R}$. Das Quotientenkriterium zeigt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{q^n}$ für

□ $q = 1$
□ $q = 2$
□ $q = \frac{1}{2}$.

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen (und nur diese) an.

---

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Das Quotientenkriterium kann man in folgenden Fällen anwenden, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{N} \frac{n^k}{n!}$ zu beweisen:

□ $k = 1$
□ $k = 2$
□ $k = -1$

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen (und nur diese) an.

---

Sei $k \in \mathbb{Z}$. In folgenden Fällen macht das Quotientenkriterium keine Aussage zur Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k}$.

□ $k = 1$
□ $k = 2$
□ $k = -1$

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen (und nur diese) an.

---

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Das Quotientenkriterium lässt sich in folgenden Fällen anwenden, um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{N} \pi^{nk}$ zu zeigen:

□ $k = 1$
□ $k = 0$
□ $k = -1$

Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen (und nur diese) an.

---

### Aufgabe 6

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 \\ -x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ ist überall stetig.

○ wahr ○ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 + x & \text{für } x < 1 \\ -1 - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ ist überall stetig.

○ wahr ○ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 - x & \text{für } x < 1 \\ 1 - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ ist überall stetig.

○ wahr ○ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 - 2x & \text{für } x < 1 \\ 2 - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ ist überall stetig.

○ wahr ○ falsch

### Aufgabe 7

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ist überall stetig und streng monoton wachsend.

○ wahr ○ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ist überall stetig und bijektiv.

○ wahr ○ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ist injektiv und hat genau eine Sprungstelle.

○ wahr ○ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ist überall stetig und injektiv.

○ wahr ○ falsch

## Aufgabe 8

Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a < 0 < b$ hat eine Nullstelle.

◯ wahr ◯ falsch

Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = -f(b)$ hat eine Nullstelle.

◯ wahr ◯ falsch

Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ hat eine Nullstelle.

◯ wahr ◯ falsch

Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < a < 0 < b$ hat eine Nullstelle.

◯ wahr ◯ falsch

## Aufgabe 9

Die Funktion $f\colon (0,1) \to (0,1)$ mit $f(x) = x^2$ hat einen Fixpunkt.

◯ wahr ◯ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 1$ hat einen Fixpunkt.

◯ wahr ◯ falsch

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 1$ hat einen Fixpunkt.

◯ wahr ◯ falsch

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to [-1,1]$ mit $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{3}$ hat einen Fixpunkt.

◯ wahr ◯ falsch

## Aufgabe 10

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion mit $f(0) > 0$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := f(a_n)$ monoton wachsend.

○ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion mit $f(0) > 0$. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := f(a_n)$ monoton fallend.

○ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := f(a_n)$ konvergent.

○ wahr ○ falsch

Sei $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ eine monoton wachsende stetige Funktion. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := f(a_n)$ konvergent.

○ wahr ○ falsch