Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **el, kyb, mech, phys**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 10** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 11 – 13** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	$x\ln x - x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$	e^x
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\ln x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	e^x
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$	
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 01.04.2016 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen **vom 4.4.2016 bis 8.4.2016 zwischen 9:30 und 11:00 Uhr oder vom 4.4.2016 bis 7.4.2016 zwischen 14:00 und 15:00 Uhr** mit Elke Gangl (Raum V57.7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*)

Sei $n \geqq 1$ eine natürliche Zahl.
Geben Sie die n-te Ableitung der Funktion $f\colon (2,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2+2x}{1-x}$ an und beweisen Sie die Formel mit Induktion.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*)

Sei $n \geqq 1$ eine natürliche Zahl.
Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

(a) Aus $A^2 = 0$ und λ Eigenwert von A folgt $\lambda = 0$.

(b) Wenn λ Eigenwert von A ist, dann ist es auch Eigenwert der transponierten Matrix A^T.

(c) Eine reelle Matrix mit ganzzahligen Einträgen hat mindestens einen reellen Eigenwert.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*)

Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

(a) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

(b) Jede stetige Funktion auf einer beschränkten offenen Menge besitzt ein globales Maximum.

(c) Es gibt eine injektive Abbildung $\mathbb{N} \to \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ stetig}\}$.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) 25 Physiker und 25 Elektrotechniker sitzen um einen runden Tisch. Ist es immer möglich, eine Person zu finden, die zwei Physiker als direkte Sitznachbarn hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*)

(a) Auf wieviele Arten kann man k Universitätsgäste in n freien Einzelbüros unterbringen für zwei natürliche Zahlen $k, n \geqq 1$ mit $k < n$?

(b) Wie lautet der Koeffizient von x^5y^5 in $(1+x)(x+y)^9$?

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Seien $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}\right)$ und $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap W$.

Aufgabe 7 (*7 Punkte*) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein $\mathbb{R}$-Vektorraum durch
$\lambda \cdot z = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mathrm{i}\lambda \operatorname{Im}(z)$.

(a) Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ eine lineare Abbildung ist, und geben Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basis $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}$ an.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von g.

Aufgabe 8 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y,z) = 8xy$, wobei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 9 (*10 Punkte*)

Die 2×2-Matrizen mit reellen Einträgen sind ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit der skalaren Multiplikation gegeben durch $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ für $\lambda, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Basis von V an.

(b) Die Abbildung $\varphi\colon V \to V, A \mapsto A + A^T$ ist linear. Bestimmen Sie den Rang von φ und geben Sie den Kern von φ an.

(c) Ist $\lambda = 2$ ein Eigenwert von φ?

Aufgabe 10 (*9 Punkte*) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu den Funktionen $f, g\colon (3, \infty) \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^{29} + 43x^2 + 2$.

(b) $g(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{x}$.

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

Aufgabe 11 (*11 Punkte*)

(a) Berechnen Sie:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{x}+5\right) = \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^3)}\right) =$$

(b) Berechnen Sie:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^{k+3}} =$$

$$\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!} =$$

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Differentialgleichung $y' = y\cdot x$ mit Anfangsbedingung $y(1) = 2$.

Aufgabe 13 (*4 Punkte*) Seien $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie $\|b_1\|$ und mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram–Schmidt eine Orthonormalbasis C des von b_1, b_2 und b_3 im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Unterraums:

$\|b_1\| =$, $C =$