Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **el, kyb, mech, phys**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 9** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 10 – 14** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	$x\ln x - x$	$\sin x$	$\tan x$	$\sinh x$	$\operatorname{arsinh} x$	e^x
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\ln x$	$\cos x$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	e^x
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$	$\cosh x$	$\operatorname{arcosh} x$	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 12.10.2015 über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **13.10.2015** bis **16.10.2015** mit Elke Gangl (Raum 7.521) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*8 Punkte*) Sei $f\colon \left(-\frac{1}{2},\infty\right) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1+2x)$.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \geqq 1$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{2^n}{(1+2x)^n}.$$

(b) Bestimmen Sie für $n > 0$ das n-te Taylorpolynom $T_n(f,x,0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und entscheiden Sie, für welche $x \in \left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ die Folge $(T_n(f,x,0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

(a) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Definieren Sie, was es heißt, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Seien $a_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels:

(i) Konvergiert die Reihe S_n, dann konvergiert die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

(ii) Konvergiert die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0, dann konvergiert die Reihe S_n.

(iii) Konvergiert die Reihe S_n, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2$.

(c) Seien $a, b \geqq 0$ reelle Zahlen. Sei $c_n := \sqrt[n]{a^n + b^n}$ eine Folge. Entscheiden Sie, ob c_n konvergiert und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3 (*13 Punkte*) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei nicht-leeren Mengen.

(a) Definieren Sie, was es heißt, dass f injektiv ist. Geben Sie explizit eine injektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ in die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ an.

(b) Definieren Sie, was es heißt, dass f surjektiv ist. Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn Folgendes gilt: Für jede weitere Menge Z und je zwei beliebige Abbildungen $g, h\colon Y \to Z$ gilt, dass $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

(c) Zeigen Sie, dass es keine surjektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ gibt.

(d) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar mit $g'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass g injektiv ist. Muss g auch surjektiv sein? Beweisen Sie dies oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqq 2$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $A = \{1, x, x^2\}$ und $B = \{x^2 + 3x + 1, 2x^2 + 1, 4x\}$ Basen von V sind.

(a) Geben Sie einen Vektorraumisomorphismus von V nach $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Berechnen Sie die darstellenden Matrizen bezüglich der Basen A und B zur linearen Abbildung $G\colon V \to V$ mit $G(f)\colon x \mapsto f'(x)$. Bestimmen Sie die Dimensionen von $\text{Kern}\,(G)$ und $\text{Bild}\,(G)$.

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Gegeben ist die folgende Teilmenge $B_t := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ t \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, sodass B_t eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Entscheiden Sie auch, für welche $t \in \mathbb{R}$ der von B_t erzeugte Unterraum 2-dimensional ist.

(b) Berechnen Sie die Matrizen für die Basiswechsel von der Standardbasis A zu der Basis B_3 und von der Basis B_3 zu der Basis A.

Aufgabe 6 (*10 Punkte*) Sei C der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Sei $V = \operatorname{span}(e^x, x^2, x)$ der von den Funktionen e^x, x^2 und x aufgespannte $\mathbb{R}$-Untervektorraum in C. Sei die Bilinearform $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$s(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \text{ für } f, g \in V.$$

(a) Berechnen Sie $s(e^x, x)$ und $s(e^x, x^2)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen e^x, x^2 und x eine Basis B von V bilden.

(c) Zeigen Sie, dass s symmetrisch und positiv definit ist.

(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von s bezüglich B.

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 4x^3 + 4y^3 - 12xy$.

Aufgabe 8 (*11 Punkte*)

(a) Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^3 + 4x + 8$

(i) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(ii) Sei g die Umkehrfunktion von f. Berechnen Sie $g'(2)$.

(b) Für welche $a \in (0,\infty)$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^a \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$ in $x = 0$ differenzierbar? Berechnen Sie im Falle der Differenzierbarkeit $f'(0)$.

Aufgabe 9 (*9 Punkte*)

(a) Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$. Zeigen Sie, dass f eine streng monoton fallende Funktion ist und dass $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$ existiert.

(b) Beweisen Sie: Ist $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige und monoton fallende Funktion, sodass $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$ existiert, dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x)) = 0$.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 10 (*10 Punkte*)

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

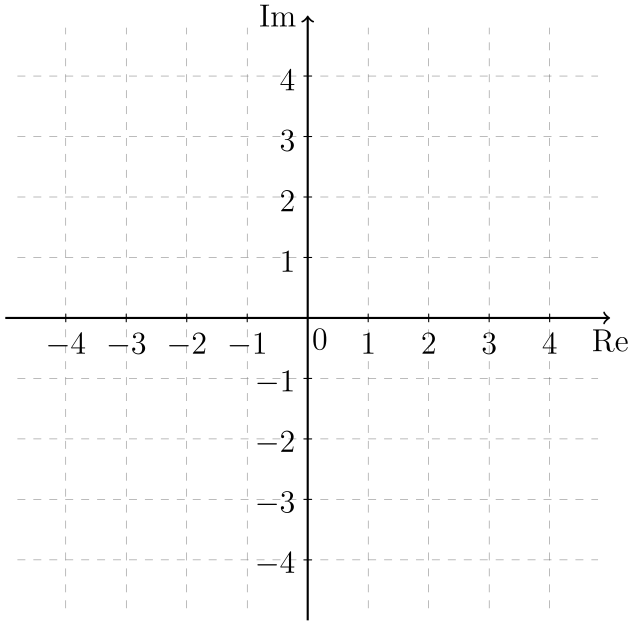
$\overline{2 - 3\mathrm{i}} =$ $\qquad$ $|2 + \mathrm{i}| =$

$(1 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) =$ $\qquad$ $\dfrac{1 - 2\mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}} =$

(b) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten:

$-3\mathrm{i} =$ $\qquad$ $-2 - 2\mathrm{i} =$

(c) Skizzieren Sie den Punkt $p = 1 + \mathrm{i}$ und die Mengen $M = \{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + \mathrm{i})| \leqq 1\}$ und $N = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) = 2\,\mathrm{Re}\,(z) - 3\}$ in der komplexen Ebene.



Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(\sin(x^2 y), \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\right)$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f.

$\mathrm{J}f\,(x, y) =$

Aufgabe 12 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & -12 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und jeweils die Dimension des zugehörigen Eigenraums.

Eigenwert λ	Dimension des Eigenraums $V(A, \lambda)$

(c) Ist A diagonalisierbar (mit Begründung)?

Aufgabe 13 (*7 Punkte*) Gegeben ist die folgende Differentialgleichung: $y'' + 3y' + 2y = 5$.

(a) Bestimmen Sie das zugehörige Polynom der zugeordneten homogenen Differentialgleichung:

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichung:

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der inhomogenen Differentialgleichung:

Aufgabe 14 (*4 Punkte*) Sei $B = \{b_1 = (1, -1, 1)^\intercal, b_2 = (1, 0, 1)^\intercal, b_3 = (1, 1, 2)^\intercal\}$. Bestimmen Sie $\|b_1\|$ und mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram–Schmidt eine Orthonormalbasis C von $\mathbb{R}^3$:

$\|b_1\| =$, $C =$