Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

SS 2015

Gruppenübung 9

Aufgabe 33

Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(a) $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{\ln(x)}{x^2} dx$.

(b) $\lim\limits_{b\to 2^-} \int\limits_0^b \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

(c) $\lim\limits_{a\to -\infty} (\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{1}{(x^2+1)^2} dx)$.

(d) $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b x^2 e^{-cx} dx$ für $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 34 (schriftlich)

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $i \in \{1,2,3\}$ mit Hilfe der Partialbruchzerlegung jeweils eine Stammfunktion und berechnen Sie $\int_a^b f_i(x)dx$:

(a) $f_1 : [-1,0] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

(b) $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}$.

(c) $f_3 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \frac{x^3-3x^2+2x+7}{x^2-4x+5}$.

Aufgabe 35

Testen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=3}^{k} \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

(b) $\sum\limits_{n=3}^{k} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

Aufgabe 36

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *stetig differenzierbare parametrisierte Kurve* ist eine Funktion $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $x : I \to \mathbb{R}$ und $y : I \to \mathbb{R}$, sodass $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ für alle $t \in I$ gilt. $x(I)$ bezeichnet das Bild der Funktion x.

(a) Sei nun zudem $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f : x(I) \to \mathbb{R}$ gibt, deren Graph gleich dem Bild von γ ist. Zeigen Sie, dass $f'(x(t_0)) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ gilt.

(b) Finden Sie solch ein f im Falle der Kurve $\gamma_1 : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie die Bogenlänge.

(c) Seien die Voraussetzungen aus (a) erfüllt und f wie in (a) gewählt. Sei $I = (a, b)$. Dann ist die Bogenlänge des Graphen von f gleich $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$. (Hinweis: Substituieren Sie geeignet.)

(d) Gegeben sei nun die parametrisierte Kurve $\gamma_2 : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ mit $x(t) = t - \sin(t)$ und $y(t) = 1 - \cos(t)$. Skizzieren Sie γ_2 und zeigen Sie, dass die Voraussetzungen aus (a) erfüllt sind.

(e) Wir betrachten wieder die Kurve γ_2 aus (d) und bezeichnen mit f_2 die nach (a) konstruierte Funktion, deren Graph gleich dem Bild von γ_2 ist. Berechnen Sie mit Hilfe von (a) die Ableitung von f_2 und die Bogenlänge der Kurve, die zum Graph von f_2 gehört.