Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

SS 2015

Gruppenübung 8

Aufgabe 29 (schriftlich)

(a) Bestimmen Sie mit partieller Integration Stammfunktionen zu folgenden Funktionen, die jeweils auf ihrem maximalen Definitionbereich definiert sind:

(i) $f_1(x) = x\sin(x)$.

(ii) $f_2(x) = e^x \sin(x)$.

(iii) $f_3(x) = \arctan(x)$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i) $\int_{e^2}^{1} \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$.

(ii) $\int_0^1 (1+x)^n(1-x)dx$ für ein natürliches $n \geq 1$.

(c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer Ellipse, die der Gleichung $\frac{y^2}{a} + \frac{x^2}{b} = 1$ und $a, b > 0$ genügt.

Aufgabe 30

Für $|x| < \frac{\pi}{2}$ und eine natürliche Zahl $n \geq 0$ definieren wir $D_n(x) := \int_0^x \tan^n(t)dt$, wobei $\tan^n(t) := (\tan(t))^n$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es ist $D_0(x) = x, D_1(x) = -\ln(\cos(x))$ und für $n \geq 1$ gilt folgende Rekursion: $nD_{n+1}(x) = \tan^n(x) - nD_{n-1}(x)$.(Hinweis: Verwenden Sie $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$.)

(b) Für $d_n := D_n(\frac{\pi}{4})$ gilt $d_0 = \frac{\pi}{4}$, $d_1 = \frac{\ln(2)}{2}$ und $nd_{n+1} = 1 - nd_{n-1}$.

(c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

(d) Für $m \geq 1$ gilt $d_{2m} = (-1)^m(\frac{\pi}{4} - \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1})$.

(e) Es gilt $\frac{\pi}{4} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Aufgabe 31

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Betrachten Sie die Partition $\mathcal{P} = \{a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b\}$ von $[a, b]$ mit $a_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$ für $j \in \{0, 1, ..., n\}$.)

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und seien $f_+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f_- : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Somit gilt $f = f_+ - f_-$. Zeigen Sie, dass f_+ und f_- Riemann-integrierbar sind. Folgern Sie zudem, dass die Funktion $|f|$ Riemann-integrierbar ist und dass gilt:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \cdot \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

(c) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [a, b]$ existiert, sodass

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f^{(2)}(\xi).$$

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Hilfsfunktion $\phi(x) := \frac{1}{2}(x-a)(b-x)$ und nutzen Sie, dass $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b \phi^{(2)}(x)f(x)dx$ gilt.)

Aufgabe 32

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

(a) $\int_3^1 (3x^2 + 2)dx$.

(b) $\int_1^2 \frac{3x^3+2x^2+x+2}{x}dx$.

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{9}} \sin(\frac{\pi}{3} - 3x)dx$.

(d) $\int_0^{\ln(3)} 2x(1 - e^x)dx$.

(e) $\int_0^1 2^{x+1}dx$.

(f) $\int_{-1}^1 x \cdot \cos(e^{(x^6)})dx$.