Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Gruppenübung 7

Aufgabe 25 (schriftlich)

Verwenden Sie Ober- und Untersummen, um zu zeigen, dass die beiden Funktionen

$$f_1, f_2 : [-1, 2] \to \mathbb{R}$$

mit $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = |x|$ Riemann-integrierbar sind und berechnen Sie mit Hilfe von Ober- und Untersummen die beiden Integrale $\int\limits_{-1}^{2} f_1(x)dx$ und $\int\limits_{-1}^{2} f_2(x)dx$.

Aufgabe 26

Bestimmen Sie alle Funktionen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, sodass

(a) für alle Partitionen P von $[0, 1]$ gilt $U(g, P) = O(g, P)$.

(b) es eine Partition P von $[0, 1]$ gibt mit $U(g, P) = O(g, P)$.

Aufgabe 27

Sei W_R die Menge der Potenzreihen mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius mindestens $R > 0$. Wir definieren folgende Abbildungen $D_i : W_R \to W_R$ für $i = 1, 2, 3$ (wobei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in W_R$ sei):

$$D_1(f)(x) = f'(x), D_2(f)(x) = xf(x), D_3(f)(x) = \int\limits_0^x f(y)dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass W_R ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und dass die D_i lineare Abbildungen sind für $i = 1, 2, 3$.

(b) Zeigen Sie folgende Identitäten für $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in W_R$:

(i) $(D_2 D_1)^k(f)(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k a_n x^n$.

(ii) $(D_3)^k(f)(x) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{a_{n-k}}{\binom{n}{k} k!} x^n$.

(c) Berechnen Sie:

(i) $\sum_{n=0}^{l} n^4$ für $l \in \mathbb{N}$.

(ii) den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=2}^{l} \frac{1}{n(n-1)} (\frac{1}{2})^n$.

(iii) $\sum_{n=0}^{l} n^2 \binom{l}{n} x^n$ für $l \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 28

Sei $f := \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ die Umkehrfunktion der Funktion

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1].$$

(a) Zeigen Sie: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $|x| < 1$.

(b) Zeigen Sie, durch gliedweises Integrieren, für $|x| < 1$ die folgende Potenzreihendarstellung: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$, wobei wir für $r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren

$$\binom{r}{n} := \frac{r(r-1)(r-2) \cdot ... \cdot (r-n+1)}{n!}.$$

(Verwenden Sie Aufgabe 23 für die Potenzreihendarstellung von $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.)