Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Gruppenübung 6

Aufgabe 21

Nutzen Sie den Mittelwertsatz, um die folgenden Aufgaben zu lösen.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und sei $f''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zudem sei $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$. Bestimmen Sie $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt: $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{<0}$ gilt: $|\cos(e^x) - \cos(e^y)| \leq |x - y|$.

Aufgabe 22 (schriftlich)

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$ das Taylorpolynom vom Grad 2 mit Entwicklungspunkt 1 und berechnen Sie auch das zugehörige Lagrange-Restglied.

(b) Finden Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms und der Darstellung des Restgliedes nach Lagrange ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, das die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^x \cdot \sin(x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ mit einem Fehler von höchstens $3 \cdot 10^{-4}$ darstellt, d.h. es soll $|p(x) - g(x)| \leq 3 \cdot 10^{-4}$ für alle $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ gelten.

(c) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, indem Sie zunächst geeignet umformen und im Anschluss die Regel von l'Hospital anwenden.

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x^3+1)}{\ln(x^4)} \right)$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right)$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \right)$

Aufgabe 23

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (1 + x)^a$ gegeben.

(a) Berechnen Sie das n-te Taylorpolynom von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt 0.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (-1, 1)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, x, 0) = 0.$$

Berechnen Sie die Potenzreihendarstellung von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt 0.

Aufgabe 24

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei zudem $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius S. Zeigen Sie:

(a) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x-a)^k$ besitzt Konvergenzradius $L \geq \min(R,S)$. Sie stellt die Funktion $f+g$ dar für $|x-a| < \min(R,S)$.

(b) Für $n \geq 0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ besitzt Konvergenzradius $L \geq \min(R,S)$. Sie stellt die Funktion $f \cdot g$ dar für $|x-a| < \min(R,S)$.

(c) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $\cos^2(x)$ und der Funktion $\sin^2(x)$ um den Entwicklungspunkt 0 mit Hilfe von Aufgabenteil (b). Folgern Sie, dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.