Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Gruppenübung 5

Aufgabe 17 (schriftlich)

(a) Entscheiden Sie direkt mit der Definition von Differenzierbarkeit für jede der folgenden Funktionen, ob sie an der Stelle $\xi = 1$ differenzierbar ist:

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x^3 + 1$.

(ii) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = |x-1|^3$.

(iii) $f_3 : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \sqrt{x-1}$.

(b) Gegeben sind die Funktionen $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = 2x^3$, $g_2 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = \frac{1-x}{1+x}$ und $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_3(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$. Berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

(i) $g_1'(3)$ (durch Anwendung der Produktregel)

(ii) $g_1'(3)$ (durch Anwendung der Kettenregel)

(iii) $g_2'(0)$ (durch Anwendung der Quotientenregel)

(iv) $g_3'(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}$ (durch Anwendung der Quotientenregel)

(c) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$

Ist h überall differenzierbar? Bestimmen Sie h' an allen Stellen, an denen es existiert. Ist h' auf seinem Definitionsbereich stetig? Ist h' auf seinem Definitionsbereich differenzierbar?

Aufgabe 18

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft, dass $x \in D$ genau dann, wenn $-x \in D$ gilt. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = f(-x)$. Eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ heißt *ungerade*, falls für alle $x \in D$ gilt: $g(x) = -g(-x)$.

(a) Bestimmen Sie alle geraden bzw. ungeraden Polynome in $\mathbb{R}[X]$ und berechnen Sie deren Ableitungen.

(b) Zeigen Sie, dass jede Funktion $h : D \to \mathbb{R}$ eine eindeutige Darstellung $h = f + g$ hat, wobei f gerade und g ungerade ist.
(Hinweis: Wählen Sie $f(x) := \frac{h(x)+h(-x)}{2}$.)

(c) Zeigen Sie, dass die Ableitung einer geraden differenzierbaren Funktion ungerade ist und dass die Ableitung einer ungeraden differenzierbaren Funktion gerade ist.

Aufgabe 19

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv sind. Berechnen Sie $(f^{-1})'(b)$ für das angegebene $b \in \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^3 + x + 1$ und $b = 3$.

(b) $f(x) = x^3 + 2x + 4$ und $b = 1$.

Aufgabe 20

In dieser Aufgabe bezeichnen wir mit der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ die eindeutige Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = 1$ und $y' = y$. Die Existenz und Eindeutigkeit wird später in der Vorlesung gezeigt. Zudem definieren wir induktiv die n-te Ableitung einer Funktion f durch $f^{(0)} := f$ und $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.

(a) Seien f und g n-mal differenzierbare Funktionen und $h : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$. Zeigen Sie, dass auch h n-mal differenzierbar ist und für die n-te Ableitung von h gilt:

$$h^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(b) Berechnen Sie die 2015-te Ableitung der Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a(x) = x^3 e^x$.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Funktionen $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $L_n(x) := \frac{e^x}{n!} l_n^{(n)}(x)$, wobei $l_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $l_n(x) := \frac{x^n}{e^x}$. Zeigen Sie, dass $L_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist und berechnen Sie die Koeffizienten dieses Polynoms.