Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Gruppenübung 4

Aufgabe 14 (schriftlich)

Überprüfen Sie, ob für die folgenden Funktionen der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ für vorgegebenes x_0 existiert und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

(a) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x+3}$ und $x_0 = 1$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lfloor x \rfloor$ und $x_0 = 0$.
(vergleiche Aufgabe 4)

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ und $x_0 = 1$ für $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
(Hinweis: Benutzen Sie die geometrische Reihe.)

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ und $x_0 = 0$.

(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{2, 10\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ und $x_0 = 2$.

(f) Überprüfen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{x \to 0+} f(x)$ existiert für $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit
$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}\left(\sqrt{\frac{1}{x} + a} - \sqrt{\frac{1}{x} + b}\right)$ und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 15

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle hat.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und surjektiv sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, das heißt, $\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|g(x)| \leq c \, \forall x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

(c) Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gibt es eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$, die jeden ihrer Werte genau n mal annimmt? Gibt es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau 3 mal annimmt?

Aufgabe 16

Sei $f : [1, 2] \to [1, 2]$ definiert durch $f(x) := \frac{2x+2}{x+2}$. Zeigen Sie, dass f kontrahierend ist und bestimmen Sie alle Fixpunkte von f.

Aufgabe 17

Wir nennen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ Hölder-stetig auf $D \subseteq \mathbb{R}$, falls es Konstanten $L, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt mit $a > 0$ und $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^a$ für alle $x, y \in D$. Ist $a = 1$ so nennen wir f dehnungsbeschränkt auf D.

(a) Zeigen Sie, dass eine Hölder-stetige Funktion auf D auch stetig auf D ist.

(b) Sei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass g auf $[0, 1]$ Hölder-stetig ist, aber nicht dehnungsbeschränkt.