Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

SS 2015

Gruppenübung 3

Aufgabe 9

Sei x eine reelle Zahl mit $0 < x < 1$. Zeigen Sie, dass x genau dann eine rationale Zahl ist, wenn in der Dezimalbruchentwicklung $x = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots.$ die Ziffern z_i periodisch werden, d.h. es gibt natürliche Zahlen p und N mit $z_{n+p} = z_n$ für alle $n \geq N$. (Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe.)

Aufgabe 10 (schriftlich)

Entscheiden Sie ob folgende Reihen konvergieren.

(a) $\sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{10000 \cdot k})$

(b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2+1}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} (\frac{k!}{k^k})^2$

(d) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^k}$

(e) $\sum_{k=1}^{n} 3^k / \binom{2k}{k}$

(f) $\sum_{k=1}^{n} (\frac{k+2}{k^3+9})^2$

Aufgabe 11

(a) Es sei $(a_k)_{(k \in \mathbb{N})}$ eine monoton fallende Nullfolge von positiven reellen Zahlen. Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$ konvergiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die eine Reihe genau dann beschränkt ist, wenn es die andere ist.)

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$?

Aufgabe 12

(a) Zeigen Sie sowohl mit der Folgendefinition als auch mit der ϵ-δ-Definition von Stetigkeit, dass die folgenden beiden Funktionen in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig sind:

   (i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.

   (ii) $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x}$.

(b) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ rational ist} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Werte $x_0 \in \mathbb{R}$, an denen h stetig ist.

Aufgabe 13

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_1(x) := c \cdot f(x)$ für $c \in \mathbb{R}$ überall stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_2(x) := |f(x)|$ überall stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_3(x) := f(x) + g(x)$ überall stetig ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion $h_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_4(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ überall stetig ist. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h_4(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

Nutzen Sie im Anschluss die Aufgabenteile (a) bis (c).)