Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks



# Gruppenübung 2

## Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie (mit einem Gegenbeispiel) folgende Aussagen für Folgen komplexer Zahlen:

(a) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

(b) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.

(c) Konvergiert $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, so konvergiert auch die Folge $(|a_n|)_{(n\in\mathbb{N})}$.

(d) Konvergiert $(|a_n|)_{(n\in\mathbb{N})}$, so konvergiert auch die Folge $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$.

(e) Konvergiert $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, so konvergiert auch die Folge $(a_n^2)_{(n\in\mathbb{N})}$.

(f) Konvergiert $(a_n^2)_{(n\in\mathbb{N})}$, so konvergiert auch die Folge $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$.

(g) Jede Folge hat nur endlich viele Häufungspunkte.

(h) Für jede natürliche Zahl $k \geq 1$ gibt es eine Folge mit genau $k$ Häufungspunkten.

(i) Jede streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen ist nach oben unbeschränkt.

(j) Konvergiert eine komplexe Folge, so konvergiert auch die Folge ihrer Realteile.

(k) Eine konvergente Folge reeller Zahlen ist monoton und beschränkt.

## Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie für die Folge $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ die Ungleichung:
$|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n}$ für $m > n$ . Schließen Sie daraus, dass die Folge eine Cauchyfolge ist.

(b) Sei $q$ eine reelle Zahl mit $0 < q < 1$ und $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$ für alle $n > N_0$, mit einem natürlichen $N_0 > 0$. Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ eine Cauchy-Folge ist.
(Hinweis: Seien $m > n > N_0$ und $k > N_0$. Zeigen Sie zunächst die Ungleichung

$$(*) : \quad |a_{k+1} - a_k| \leq q^{k-N_0}|a_{N_0+1} - a_{N_0}|.$$

Verwenden Sie nachfolgend $|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n|$ und setzen sie die Ungleichung $(*)$ für die einzelnen Terme ein. Erkennen Sie eine geometrische Reihe?)

(c) Die Folge $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ sei rekursiv definiert durch: $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{2+a_n}{1+a_n}$, für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ ist, die in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert hat. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}|$ für $n \geq 2$ und verwenden Sie im Anschluss den Aufgabenteil (b) .)

## Aufgabe 7 (schriftlich)

Überprüfen Sie nachstehende Folgen $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ auf Monotonie (nur bei reellen Folgen!) und Beschränktheit, und bestimmen Sie ihre Häufungspunkte. Entscheiden Sie auch, ob die Folge konvergiert.

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

(c) $a_n = i^n$

(d) $a_n = \frac{n^2+1}{n^3+n}$

(e) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(f) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

## Aufgabe 8

Wir definieren ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ für zwei reelle Zahlen $a, b$ als die Menge

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}.$$

(a) Sei $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen und $(b_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Der Grenzwert der Folge $(c_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, mit $c_n := b_n - a_n$, ist 0.

Zeigen Sie, dass es genau eine reelle Zahl $x$ gibt, mit $a_n \leq x \leq b_n$ für alle $n \geq 1$.

(b) Seien $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ und $(b_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ zwei Folgen wie im ersten Aufgabenteil. Wir definieren abgeschlossene Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$. Zeigen Sie, dass die Länge der Intervalle $I_n$ eine Nullfolge bildet und dass $I_{n+1} \subseteq I_n$ gilt für alle $n \geq 1$. Man nennt eine solche Folge von Intervallen eine Intervallschachtelung. Nach Teil (i) gibt es für jede solche Intervallschachtelung eine eindeutige Zahl $x$, mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Intervallschachtelung $I_n$ an (wie oben) mit $x = \frac{1}{3}$.

(c) Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gibt. (Hinweis: Nehmen Sie an, es gebe eine solche Abbildung $r$ und definieren Sie eine Intervallschachtelung $(I_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, mit $r_n := r(n) \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dann, dass es kein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $r_n = x$, wobei $x$ die eindeutig bestimmte Zahl ist, mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.) Damit sind insbesondere $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig.