Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Gruppenübung 11

Aufgabe 42

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$f(r, \phi, \psi) = (r \sin(\phi)\cos(\psi), r \sin(\phi)\sin(\psi), r \cos(\phi)).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Abbildung.

(b) Bestimmen Sie die Menge U aller Punkte, an denen f lokal umkehrbar ist.

(c) Berechnen Sie die Jacobimatrix der Umkehrabbildung in allen Punkten von U.

Aufgabe 43

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine symmetrische 2×2 Matrix mit Determinante D. Zeigen Sie folgende Aussagen:

  (i) A ist genau dann positiv definit, falls $D > 0$ und $a > 0$.

  (ii) A ist genau dann negativ definit, falls $D > 0$ und $a < 0$.

  (iii) A ist genau dann indefinit, falls $D < 0$.

(b) Gegeben sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^3$ und $g(x, y) = x^2 + y^4$. Zeigen Sie, dass der Punkt $(0, 0)$ eine kritische Stelle von f und von g ist. Zeigen Sie auch, dass die Hessematrix an diesem Punkt in beiden Fällen weder positiv noch negativ definit ist, aber g dort sein globales Minimum hat, während f im Nullpunkt kein Extremum hat.

(c) Gegeben ist die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $h(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$. Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von h und entscheiden Sie, ob dort Extrema vorliegen. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Art der Extrema.

Aufgabe 44

Verwenden Sie die Multiplikatormethode nach Lagrange, um unter allen Quadern mit Raumdiagonale der Länge 1 jene zu finden, die maximale Oberfläche haben.

Aufgabe 45

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

(b) Gegeben ist die Ellipse in $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 5$ definiert ist. Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatormethode nach Lagrange die Scheitelpunkte der Ellipse, das heißt, jene Punkte, die den größten bzw. kleinsten Abstand zum Nullpunkt haben.