Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

SS 2015

Gruppenübung 10

Aufgabe 38 (schriftlich)

(a) Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen, den Gradienten und die Richtungsableitungen in Richtung $(2,-1)^T$ der folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(i) $f_1(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2$.

(ii) $f_2(x,y) = x^2 \sin(y) + 2$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x^2 y$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3$.

(c) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = \sin(x)\cos(y)e^z$.

Aufgabe 39

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt $(0,0)$ in alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar ist. Ist f im Nullpunkt auch total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = \min\{x,y\}$. Bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$, an denen g partiell differenzierbar ist und geben Sie die partiellen Ableitungen an.

(c) Gegeben ist die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = (x^2 - 2y)(x^2 + y^2 - 3)$.

(i) Skizzieren Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\}$. Markieren Sie zudem jene Bereiche, an denen die Funktion h positive bzw. negative Werte annimmt.

(ii) Bestimmen Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$, für die der Gradient von h verschwindet. Argumentieren Sie ohne Verwendung der Hesse-Matrix, an welchen dieser Punkte die Funktion h ein Extremum hat.

Aufgabe 40

(a) Seien A und $\tilde{A}$ zwei $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$, sei $\tilde{A}$ symmetrisch und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie die totale Ableitung:

  (i) $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $g_1(x) = Ax + b$.

  (ii) $g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = x^T \tilde{A} x$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (2 + y) \cdot e^{(3+\sin(x^5))}$. Berechnen Sie $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y^2 \partial x^{1000}}$.

Aufgabe 41

Wir bezeichnen mit $||x||$ die euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$. Sei $I \subseteq (0, \infty)$ ein Intervall und $K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \in I\}$. Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $f : K(I) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := F(||x||)$.

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen und die totale Ableitung von f und zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

(b) Für eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir $\Delta(g(x)) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(x_i)^2}$. Zeigen Sie mit $r := ||x||$: $\Delta(f(x)) = F''(r) + \frac{n-1}{r} F'(r)$.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t^n}} \cdot e^{\frac{-||x||^2}{4t}}$ die Wärmeleitungsgleichung $\Delta(\phi(x, t)) = \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}$ löst.