Steffen König
René Marczinzik
Frederik Marks

Höhere Mathematik 2 für el, kyb, mecha, phys

SS 2015

Gruppenübung 1

Aufgabe 1

(i) Gegeben sind die drei Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, die eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden (dies muss nicht nachgewiesen werden). Bestimmen Sie aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens nach Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bezüglich des Standardskalarproduktes).

(ii) Gegeben sei auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]$ das Skalarprodukt

$$s(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von s bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$. (Es muss nicht nachgewiesen werden, dass es sich um eine Basis handelt.)

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 2 (schriftlich)

(i) Sei s die symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ gegeben ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bzgl. des Standardskalarproduktes), sodass die zugehörige darstellende Matrix von s Diagonalgestalt hat.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: s ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

(ii) Gegeben sei die Kurve $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie eine reelle 2×2-Matrix A, sodass für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$7x_1^2 + 24x_1x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch und entscheiden Sie, ob es sich um eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel handelt. (Tipp: Bestimmen Sie zunächst Eigenvektoren von A. Welche Rolle spielen diese geometrisch? Vergleichen Sie dazu das Beispiel in der letzten Vorlesung des WS 14/15.)

(c) Skizzieren Sie die Kurve im Standardkoordinatensystem.

Aufgabe 3

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Falls die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ paarweise orthogonal sind und $v_i \neq 0$ für $i = 1, 2, ..., n$ gilt, dann sind die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ linear unabhängig.

(ii) Sei nun zusätzlich $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ für $i = 1, 2, ..., n$. Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle v_k.$$

Aufgabe 4

(i) Zeigen Sie dass die Folge $(a_n)_{(n \in \mathbb{N})}$, mit $a_n = \frac{n}{2^n}$, gegen 0 konvergiert und geben Sie für $\epsilon = \frac{1}{1000}$ ein N_0 an, sodass $a_n < \epsilon$ für alle $n \geq N_0$ gilt. (Hinweis: Benutzen Sie $n^2 \leq 2^n$ für $n \geq 4$.)

(ii) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen $(a_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ konvergieren und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{n^2}{3n^2+1}$

(b) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$

(c) $a_n = -n + \sqrt{n^2 + 3n}$

(d) $a_n = i^n$

(e) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (Hinweis: Benutzen Sie dass $c^n/n!$ gegen 0 konvergiert, für ein beliebiges $c > 1$.)

(iii) Sei $(b_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Beweisen Sie: Konvergiert $(b_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ gegen b, so konvergiert die Folge $(\sqrt{b_n})_{(n \in \mathbb{N})}$ gegen $\sqrt{b}$.

(iv) Für eine reelle Zahl x, bezeichne $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Zeigen Sie: Die Folge rationaler Zahlen $(a_n)_{(n \in \mathbb{N})}$, mit $a_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, konvergiert gegen x.