1 Folgen und Grenzwerte

1.1 Definition Sei X eine Menge. Eine *Folge* von Elementen in X ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$ oder $a : \mathbb{N}_0 \to X$. Wir schreiben $a_n := a(n)$. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (oder einfach (a_n)) bezeichnet die Folge.

1.2 Definition Sei A eine Menge mit einem Abstandsbegriff d (z.B. $A = \mathbb{R}$ oder $A = \mathbb{C}$) und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen in A. Die Folge (a_n) *konvergiert* gegen den *Grenzwert* $a \in A$ genau dann, wenn gilt:
$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists\ N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geqslant N_0(\varepsilon) : d(a_n, a) < \varepsilon$.
Schreibweise: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.
Die Folge (a_n) heißt dann *konvergent*. Wenn die Folge (a_n) keinen Grenzwert hat, dann heißt sie *divergent*.

1.3 Lemma Eine konvergente Folge hat genau einen Grenzwert. D.h. $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b \Rightarrow a = b$.

1.4 Proposition Gegeben sind konvergente Folgen $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} b$ sowie eine Konstante c (alle a_n, b_n und c in derselben Menge). Dann gilt:

(a) $a_n + b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$. Insbesondere: $a_n + c \longrightarrow a + c$

(b) $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$. Insbesondere: $c \cdot a_n \longrightarrow c \cdot a$ und $-a_n \longrightarrow -a$

(c) Falls $b_n \neq 0$ für alle n und $b \neq 0$: $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$

Seien nun alle a_n, b_n reelle Zahlen. Dann gilt:

(d) $a_n \leqslant b_n\ \forall\ n \Rightarrow a \leqslant b$

(e) Sei (d_n) eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \leqslant d_n \leqslant b_n\ \forall\ n$.

Falls $a = b$, dann konvergiert $d_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a = b$. ("Sandwichsatz")

Beispiele:

$\sqrt[n]{x} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$

2 Folgen reeller Zahlen

2.1 Theorem (Konvergenzkriterium von Cauchy): Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist konvergent genau dann, wenn gilt:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1, n_2 \geqslant N_0 : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$

(dann heißt (a_n) eine Cauchy-Folge).

2.2 Lemma Eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (reeller Zahlen) ist *beschränkt*, d.h. die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ hat eine obere und eine untere Schranke.

2.3 Definition Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend* (oder monoton steigend) $:\Leftrightarrow \forall\ n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant a_{n+1}$. Wenn $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geqslant a_{n+1}$, dann heißt (a_n) *monoton fallend*. Die Folge (a_n) heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

2.4 Theorem (Satz von Bolzano und Weierstraß, erster Teil): Eine monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.

2.5 Proposition Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ ist beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. Der Grenzwert wird mit e bezeichnet und heißt die *Eulersche Zahl.*

2.6 Lemma Sei $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit $s_n := \sum_{j=0}^{n} q^j$. Dann konvergiert (s_n) gegen $\frac{1}{1-q}$.

2.7 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ k \mapsto n_k$ eine streng monoton wachsende Abbildung, d.h. $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Dann heißt $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_k = a_{f(k)} = a_{n_k}$ eine *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.8 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt a ein *Häufungspunkt* oder *Häufungswert* der Folge (a_n) :$\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ unendlich viele Indizes k mit $|a - a_k| < \varepsilon$.

2.9 Proposition Eine Zahl a ist genau dann Häufungspunkt einer Folge (a_n), wenn sie Grenzwert einer Teilfolge ist.

2.10 Theorem (Satz von Bolzano und Weierstraß, zweiter Teil): Eine beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

3 Reihen

3.1 Definition Eine (unendliche) *Reihe* ist eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zu der eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass $\forall n \in \mathbb{N} : s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ gilt. Die s_n heißen *Teilsummen* oder *Partialsummen.* Falls $s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$, schreiben wir $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s$.

Beispiele

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$ *harmonische Reihe.* Diese Reihe divergiert.

$s_n = \sum_{j=0}^{n} q^j$ für $|q| < 1$, *geometrische Reihe.* $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \dfrac{1}{1-q}$.

$\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{1}{j!} = e$ *Exponentialreihe.*

3.2 Lemma Wenn $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. $a_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$.

3.3 Definition Eine Folge (a_j) heißt *alternierend*, wenn für alle j gilt: $a_j \cdot a_{j+1} \leqslant 0$ (d.h. Vorzeichenwechsel bei jedem Schritt). Eine Reihe heißt alternierend, wenn die zugehörige Folge (a_j) alternierend ist.

3.4 Leibniz-Kriterium Eine alternierende Reihe $\sum_{j=1}^{n} a_j$ konvergiert, falls die Folge $(|a_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

3.5 Definition Eine Reihe $\sum_{j=1}^{n} a_j$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{j=1}^{n} |a_j|$ konvergiert. Die Reihe $\sum_{j=1}^{n} a_j$ heißt *bedingt konvergent*, wenn sie konvergiert, aber $\sum_{j=1}^{n} |a_j|$ divergiert.

3.6 Satz Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert gegen denselben Grenzwert.

3.7 Schockierender Satz: (Riemannscher Umordnungssatz) Sei $\sum_{j=1}^{n} a_j$ eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen und x irgendeine reelle Zahl. Dann existiert eine Umordnung der Reihe, die gegen x konvergiert. Außerdem gibt es eine divergente Umordnung, die nach oben unbeschränkt ist und eine, die nach unten unbeschränkt ist.

3.8 Kriterien zur Konvergenz von Reihen Sei $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe. Dann gilt:

(a) (Majoranten-Kriterium) Falls eine konvergente Reihe $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $|a_j| \leqslant b_j \forall j$, dann konvergiert auch $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$, sogar absolut.

(b) (Quotienten-Kriterium) Falls $\exists t \in [0,1)$ und $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geqslant N_1 : a_n \neq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leqslant t$, dann ist $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$ absolut konvergent.

(b) (Wurzel-Kriterium) Falls $\exists t \in [0,1)$ und $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geqslant N_2 : \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant t$, dann ist $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)$ absolut konvergent.

4 Stetige Funktionen

4.1 Erste Definition von Stetigkeit: (Folgendefinition) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $x_0 \in X$.

f heißt *stetig an* x_0 $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in X und $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

f heißt *stetig in* (oder auf) X, wenn es an jeder Stelle $x_0 \in X$ stetig ist.

Beispiele:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist überall stetig.

$g(x) := n$ für $n \leqslant x < n+1$ ist für $x \in \mathbb{Z}$ nicht stetig: $g(n) = n$, rechts davon auch, aber links von $n : g(x) = n - 1$ „Sprungstelle“

4.2 Zweite Definition von Stetigkeit **(ε-δ-Definition)** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $x_0 \in X$. f heißt *stetig an* x_0: $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x_1 \in X : \underbrace{|x_1 - x_0|}_{=d(x_1,x_0)} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x_1) - f(x_0)|}_{=d(f(x_1),f(x_0))} < \varepsilon$$

Die Menge $\underbrace{\{x_1 \in X : d(x_1, x_0) < \delta\}}_{U_\delta(x_0)}$ heißt δ-*Umgebung* von x_0.

Entsprechend heißt $\underbrace{\{y_1 \in Y : d(y_1, f(x_0)) < \varepsilon\}}_{U_\varepsilon(f(x_0))}$ ε-Umgebung von $f(x_0)$. Die Definition verlangt also, dass f eine δ-Umgebung von X_0 in eine ε-Umgebung abbildet: $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$.

Achtung: Ob eine Funktion (überall oder in einem bestimmten Punkt) stetig ist, hängt von der Wahl des Definitionsbereichs ab. $\tilde{X} \subset X, f$ stetig auf $X \Rightarrow f$ stetig auf $\tilde{X}$, aber die Umkehrung gilt nicht.

4.3 Lemma Sei $f : X \to Y$ stetig an x_0 und $g : U \to V$ mit $Y \subset U$ stetig an $f(x_0)$. Dann ist $g \circ f$ auch an x_0 stetig.

Für X und Y wählt man oft $\mathbb{R}$ selbst oder eine der folgenden Mengen (Intervalle):

$[a, b] \ = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a, b) \ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a, b) \ = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ halboffenes Intervall

$(a, b] \ = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$ halboffenes Intervall

oder auch

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

In dieser Notation ist $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

4.4 Nullstellensatz von Bolzano: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so dass $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$, d.h. f hat eine Nullstelle.

4.5 Korollar (Zwischenwertsatz von Bolzano) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und y eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y$.

4.6 Definition Sei $f : X \to X$ eine Selbstabbildung der Menge X. $x_0 \in X$ heißt *Fixpunkt* von f :$\Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

4.7 Korollar Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Dann existiert ein Fixpunkt.

4.8 Proposition Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ monoton wachsend (d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$) und stetig, $a_0 \in [a, b]$ und $a_{n+1} := f(a_n)\ \forall n$ (rekursive Definition). Dann ist (a_n) eine monoton wachsende oder fallende Folge, die konvergiert. Der Grenzwert ist ein Fixpunkt von f.

4.9 Kontraktionssatz Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine *kontrahierende* Selbstabbildung, d.h. $\exists q \in [0, 1)$, so dass $\forall x, y \in [a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant q|x - y|$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $c \in [a, b]$.
Sei $x_0 \in [a, b]$ und $x_{n+1} := f(x_n)$. Diese Folge konvergiert gegen c. Außerdem gilt die Fehlerabschätzung

$$|c - x_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kontrahierende Selbstabbildungen sind Spezialfälle von *dehnungsbeschränkten* (oder *Lipschitz-stetigen*) Funktionen, für die gilt: $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda|x - y|$ mit irgendeinem $\lambda \geqslant 0$. Solche Funktionen sind immer stetig.

4.10 Theorem Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f injektiv $\Leftrightarrow$ f ist streng monoton wachsend oder fallend.

4.11 Theorem Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ beschränkt und f hat ein Maximum und ein Minimum:
$\exists x_1 \in [a, b] : \forall x : f(x) \leqslant f(x_1), \exists x_2 \in [a, b] : \forall x : f(x) \geqslant f(x_2)$.

Beispiele:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \text{ist nirgends stetig.}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) := \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases} \qquad \text{ist an } x_0 = 1 \text{ nicht stetig.}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{ist an } x_0 = 0 \text{ unstetig.}$$

4.12 Definition Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}$. Wir sagen, dass ξ im *Abschluss von* X liegt genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen in X gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.
Bezeichnung: $\xi \in \overline{X}$.

Sei nun $\xi \in \overline{X}$ und $\eta_l \in \mathbb{R}$. η_l heißt der *linksseitige Grenzwert* von f an der Stelle $\xi :\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Elementen in X mit $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$, alle $x_n < \xi$, gilt: $f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta_l$.

Schreibweise: $\eta_l = \lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow\xi} f(x) = f(\xi-)$.
Entsprechend heißt $\eta_r \in \mathbb{R}$ der *rechtsseitige Grenzwert* von f an der Stelle $\xi :\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Elementen in X mit $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$, alle $x_n > \xi$, gilt: $f(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta_r$.

Schreibweise: $\eta_r = \lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = \lim\limits_{x\searrow\xi} f(x) = f(\xi+)$.

4.13 Proposition Sei $X = \mathbb{R}$ oder $X = (a, b)$, $f : X \to \mathbb{R}$ und $\xi \in X$. Dann ist f an ξ stetig $\Leftrightarrow f(\xi-) = f(\xi+) = f(\xi)$.
Wenn $f(\xi-) = f(\xi+)$ gilt, kann man f an der Stelle ξ stetig machen: Sei $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \neq \xi \\ f(\xi-) = f(\xi+), & x = \xi \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig an ξ und stimmt außerhalb von ξ mit f überein.

5 Differenzierbare Funktionen

5.1 Definition Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in I$. Dann heißt f *differenzierbar* in $\xi :\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{x \to \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} =: \eta \in \mathbb{R}$.

Bezeichnung: $\eta =: f'(\xi)$, die *Ableitung von f in ξ*.

5.2 Lemma Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$ und $F_\xi := \begin{cases} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, & x \neq \xi \\ \eta, & x = \xi \end{cases}$

Dann gilt: f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) = \eta \Leftrightarrow F_\xi$ stetig in ξ.

5.3 Lemma Wenn f in ξ differenzierbar ist, dann ist f in ξ auch stetig.

5.4 Theorem Die reellwertigen Funktionen f und g seien im Intervall I definiert und in $\xi \in I$ differenzierbar, die reellwertige Funktion h sei im Intervall J definiert und es gelte $J \supset f(I)$, so dass $h \circ f$ definiert ist.
Dann gilt:

(a) $f + g$ ist in ξ differenzierbar und $(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$.

$f - g$ ist in ξ differenzierbar und $(f - g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)$.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist λf in ξ differenzierbar und $(\lambda f)'(\xi) = \lambda \cdot f'(\xi)$.

(b) (Produktregel) $f \cdot g$ ist in ξ differenzierbar und $(f \cdot g)'(\xi) = (f \cdot g')(\xi) + (f' \cdot g)(\xi)$.

(c) (Quotientenregel) Falls $g(\xi) \neq 0$ ist, ist $\frac{f}{g}$ in ξ differenzierbar und

$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{(gf')(\xi)-(fg')(\xi)}{(g^2)(\xi)}$.

(d) (Kettenregel) Falls h in $f(\xi)$ differenzierbar ist, ist $h \circ f$ in ξ differenzierbar und $(h \circ f)'(\xi) = h'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$.

5.5 Proposition Sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig und an $\xi \in I$ differenzierbar mit $f'(\xi) \neq 0$. Dann existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf $f(I)$ und ist an $\eta = f(\xi)$ differenzierbar mit $(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$.

5.6 Definition Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in (a, b)$. f hat in ξ ein *lokales (oder relatives) Extremum* $:\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, so dass

$\forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(x) \leqslant f(\xi)$ *(lokales Maximum)* oder

$\forall x \in U_\varepsilon(\xi) : f(x) \geqslant f(\xi)$ *(lokales Minimum).*

Wenn nur für $x = \xi$ Gleichheit gilt, heißt das Extremum *streng* (oder *strikt).*

5.7 Proposition Sei ξ ein lokales Extremum von $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und f differenzierbar in ξ. Dann ist $f'(\xi) = 0$.

5.8 Theorem Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a,b) differenzierbar ist.

(a) (Satz von Rolle) Falls $f(a) = f(b)$, existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

(b) (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Es existiert ein $\xi \in (a,b)$, so dass

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

5.9 Anwendungsbeispiele des Mittelwertsatzes: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

(a) Falls $\exists m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ $\forall x \in (a,b)$, dann gilt

$\forall x_1, x_2 \in [a,b], x_1 \leqslant x_2 : m(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1) \leqslant M(x_2 - x_1)$, d.h. für

$x_1 < x_2 : m \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant M$.

(b) Falls $f'(x) = 0$ für $x \in (a,b)$, dann gilt: f ist konstant. D.h. die Lösungen der Differentialgleichung $f' = 0$ sind genau die konstanten Funktionen.

(c) Falls f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar ist und es eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit $f'(x) = \alpha f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, dann ist $f(x) = f(0)e^{\alpha x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. D.h. die Lösungen der Differentialgleichung $f' = \alpha f$ sind die Exponentialfunktionen, wobei der Wert an der Stelle 0 gewählt werden kann.

5.10 Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien f und g auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$. Falls $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, dann ist $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

5.11 Regeln von (de) l'Hospital: (oder l'Hôpital) Die Funktionen f und g seien differenzierbar auf (a,b) und $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, und es gelte

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a+} g(x)$. Falls $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und der Grenzwert ist derselbe: $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Eine analoge Aussage gilt für $x \to b-$.

6 Taylorreihen und Potenzreihen

6.1 Definition Sei f in einer Umgebung von x_0 mindestens n-mal differenzierbar. Das Polynom $T_n(f, x, x_0) := \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$ heißt *Taylorpolynom* (der Stufe n um den Entwicklungspunkt x_0) zu f.

6.2 Theorem (Satz von Taylor) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) $(n+1)-$mal differenzierbar, wobei für $k \leqslant n$ die $k-$te Ableitung $f^{(k)}$ auf $[a,b]$ stetig fortsetzbar sei (d.h. die einseitigen Grenzwerte an a und an b sollen existieren). Sei $x_0 \in (a,b)$ fest und für $x \in (a,b)$ sei $R_n(f,x,x_0) := f(x) - T_n(f,x,x_0) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$.

Dann gilt für
$x \in (a,b)$: $\exists \nu = \nu(x,x_0) \in [0,1)$, so dass $R_n(f,x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\nu(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Das bedeutet: $f(x) = \underbrace{\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}\ (x_0)}{j!}(x-x_0)^j}_{\substack{\text{Taylorpolynom} \\ T_n(f,x,x_0)}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}\ (x_0+\nu(x-x_0))}{(n+1)!}\ (x-x_0)^{n+1}}_{\substack{\text{Fehlerterm } R_n(f,x,x_0) \\ \text{„Restglied nach Lagrange“}}}.$

6.3 Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Folge $\left(\sum\limits_{j=0}^{n} a_j(x-x_0)^j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Potenzreihe* um den Entwicklungspunkt x_0. Wenn die Polynome Taylorpolynome einer Funktion f sind, bezeichnet man die Reihe auch als *Taylorreihe*.

6.4 Theorem Sei $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j(x-x_0)^j$ eine Potenzreihe.

Die Menge $\{x_1 \in \mathbb{R} | \sum\limits_{j=0}^{n} a_j(x_1-x_0)^j$ konvergiert$\}$ ist ein Intervall I mit Mittelpunkt x_0 oder ganz $\mathbb{R}$. Die Reihe konvergiert sogar absolut auf dem Inneren von I. Dieses Intervall I heißt *Konvergenzintervall* der Potenzreihe.
Wenn $I = (x_0-R, x_0+R)$ oder $[x_0-R, x_0+R)$ oder $(x_0-R, x_0+R]$ oder $[x_0-R, x_0+R]$ ist, nennen wir R den *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Falls $I = \mathbb{R}$, sagen wir, der Konvergenzradius ist ∞. Der Konvergenzradius kann bestimmt werden als

$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ (oder als $\frac{1}{\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$, falls existent), wobei $\frac{1}{0} = \infty$ gesetzt wird.

6.5 Theorem Sei $\sum\limits_{n=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzintervall I und f die Summenfunktion $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$. Dann gilt:

(a) f ist auf I stetig.

(b) f ist im Inneren von I beliebig oft differenzierbar und $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\ a_k(x-x_0)^{k-1}$.

(c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist die Taylorreihe von f.

6.6 Identitätssatz für Potenzreihen
Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ mit dem gemeinsamen Konvergenzintervall I und $f(x_j) = g(x_j)$ für eine Folge $x_j \overset{j\to\infty}{\to} x_0$ mit $x_j \neq x_0\ \forall j$.

Dann gilt: $f(x) = g(x)$ auf ganz I und $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}$.

6.7 Transformationssatz für Potenzreihen
Sei $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$ und Konvergenzintervall I und sei $x_1 \in I$.

Dann gilt für alle x mit $|x-x_1| < \underbrace{R-|x_1-x_0|}_{=\infty,\text{ falls } R=\infty}$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_1)^k$ mit $b_k := \sum\limits_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(x_1-x_0)^{n-k}$.

6.8 Reihendarstellungen von sin und cos:
Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} \pm \ldots$ und
$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} \pm \ldots$

6.9 Reihendarstellungen von e^x und $\ln(1+x)$:
Für $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x = \exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} x^k$.
Für $x \in (-1,1]$ ist $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$.

7 Das Riemannsche Integral

7.1 Definition Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und

$P = \{a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b\}$ eine *Partition* (Aufteilung) von $[a,b]$. $\mathcal{P}$ sei die Menge aller Partitionen von $[a,b]$.

Für $j=1,\ldots,n$ sei

$$m_j := \inf\{f(x) : a_{j-1} \leqslant x \leqslant a_j\} \text{ und}$$
$$M_j := \sup\{f(x) : a_{j-1} \leqslant x \leqslant a_j\}.$$

$U(f,P) := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \cdot (a_j - a_{j-1})$ heißt *Untersumme.*

$O(f,P) := \sum\limits_{j=1}^{n} M_j \cdot (a_j - a_{j-1})$ heißt *Obersumme.*

$U(f) := \sup\{U(f,P) : P \text{ Partition}\}$ heißt *Unterintegral* von f.

$O(f) := \inf\{O(f,P) : P \text{ Partition}\}$ heißt *Oberintegral* von f.

Falls $U(f) = O(f)$ gilt, heißt f *Riemann-integrierbar* (oder *Darboux-integrierbar).*

Bezeichnung: $\int_a^b f(x)dx := O(f) = U(f)$, das *Riemannsche Integral* von f auf dem Intervall $[a,b]$.

Formal setzen wir $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$.

7.2 Kriterium für Integrierbarkeit: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist integrierbar $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists P$ Partition von $[a,b]$ mit $O(f,P) - U(f,P) < \varepsilon$.

7.3 Proposition Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar.

7.4 Proposition

(a) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow f + g$ integrierbar und

$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $a < c < b \Rightarrow f$ auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar und

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

7.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

7.6 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Flächenfunktion $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

7.7 Definition Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion von f* $:\Leftrightarrow F$ ist differenzierbar und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

7.8 Partielle Integration (oder Produktintegration): Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. differenzierbar mit stetiger Ableitung). Dann gilt:
$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$.

7.9 Substitutionsregel: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\varphi([a,b]) \subset I$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

(**Achtung:** Integrationsgrenzen ändern sich)

7.10 Proposition Ein nichtkonstantes reelles Polynom ist ein Produkt von Linearfaktoren und quadratischen Faktoren, jeweils mit reellen Koeffizienten.

7.11 Partialbruchzerlegung Seien $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit Grad $p <$ Grad q, und $q(x)$ habe die Form $q(x) = a(x-x_1)^{\rho_1} \dots (x-x_r)^{\rho_r}(x^2 + A_1x + B_1)^{\sigma_1} \dots (x^2 + A_sx + B_s)^{\sigma_s}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{p(x)}{q(x)} &= \tfrac{a_{11}}{x-x_1} + \tfrac{a_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \tfrac{a_{1\rho_1}}{(x-x_1)^{\rho_1}} \\
&+ \dots \\
&+ \tfrac{a_{r1}}{x-x_r} + \tfrac{a_{r2}}{(x-x_r)^2} + \cdots + \tfrac{a_{r\rho_r}}{(x-x_r)^{\rho_r}} \\
&+ \tfrac{\alpha_{11}x+\beta_{11}}{x^2+A_1x+B_1} + \tfrac{\alpha_{12}x+\beta_{12}}{(x^2+A_1x+B_1)^2} + \cdots + \tfrac{\alpha_{1\sigma_1}x+\beta_{1\sigma_1}}{(x^2+A_1x+B_1)^{\sigma_1}} \\
&+ \dots
\end{aligned}$$

$+\frac{\alpha_{s1}x+\beta_{s1}}{x^2+A_sx+B_s}+\frac{\alpha_{s2}x+\beta_{s2}}{(x^2+A_sx+B_s)^2}+\cdots+\frac{\alpha_{s\sigma_s}x+\beta_{s\sigma_s}}{(x^2+A_sx+B_s)^{\sigma_s}}$

mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen $a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$.
Die Summanden heißen *Partialbrüche*.

7.12 Satz von Taylor mit Integral-Restglied: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$mal stetig differenzierbar auf I und x_0 ein innerer Punkt von I. Dann gilt für alle $x \in I$:
$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_n(f,x,x_0)$ mit $R_n(f,x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\, f^{(n+1)}\,(t)dt$.

7.13 Restglied nach Cauchy im Satz von Taylor: $\exists \vartheta \in [0,1]$ so dass:

$R_n(f,x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{n!}\,(1-\vartheta)^n\,(x-x_0)^{n+1}$.

7.14 Wallissches Produkt: $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}$

7.15 Definition Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Die Menge $C_f = \{(x,y) : y = f(x), x \in [a,b]\}$ heißt die (von f erzeugte) *ebene Kurve*

7.16 Definition Falls $\sup\limits_{P\in\mathcal{P}} L_P(C_f)$ in $\mathbb{R}$ existiert, definieren wir die *Bogenlänge* von C_f als $L\,(C_f) := \sup\limits_{P\in\mathcal{P}} L_P\,(C_f)$.

7.17 Theorem Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist die Bogenlänge von C_f definiert und es gilt: $L(C_f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

7.18 Integral-Vergleichskriterium für Reihen: Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_1^n f(x)dx$ konvergiert.

7.19 Eigenschaften der Gamma-Funktion:
Die *Gamma-Funktion* ist für $x > 0$ definiert durch $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

(a) $\Gamma(1) = 1$.

(b) (Funktionalgleichung) $\Gamma(x+1) = x\;\Gamma(x)\ \forall x > 0$.

(c) $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$.

8 Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

8.1 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen (d.h. $\forall \vec{x} \in D\ \exists \varepsilon : U_\varepsilon(\vec{x}) \subset D$), $f : D \to \mathbb{R}$, $\vec{a} \in D$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{r} \neq \vec{0}$. f heißt *an $\vec{a}$ in Richtung $\vec{r}$ differenzierbar* $:\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{r})-f(\vec{a})}{h}$ existiert.

Der Grenzwert heißt dann die *Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{r}$* .

Bezeichnung: $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{a})$.

Falls $\vec{r} = \vec{e_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$ der k-te Einheitsvektor ist, nennt man den Grenzwert die *k-te partielle Ableitung* und sagt, dass f an $\vec{a}$ nach x_k partiell differenzierbar ist.

Bezeichnung: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a})$.

8.2 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ an $\vec{a}$ nach jeder Variablen partiell differenzierbar.

Dann heißt der Vektor $\nabla f(\vec{a}) = (\text{grad } f)(\vec{a}) := \begin{pmatrix} f_{x_1} & (\vec{a}) \\ \vdots & \\ f_{x_n} & (\vec{a}) \end{pmatrix}$ *Gradient* von f an $\vec{a}$.

8.3 Satz von Schwarz Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in alle Koordinatenrichtungen zweimal partiell ableitbar und die zweiten partiellen Ableitungen seien stetig. Dann vertauschen die partiellen Ableitungen, d.h. $\forall\ i, j : \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f$.

8.4 Proposition Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen und $\vec{r}$ ein Richtungsvektor der Länge 1 (d.h. $\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = 1$ im euklidischen Skalarprodukt). Dann gilt für $\vec{a} \in D : \frac{\partial}{\partial \vec{r}} f(\vec{a}) = \langle \text{grad } f(\vec{a}), \vec{r} \rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{a}) \cdot \vec{r_j}$

8.5 Landau- Symbole Seien $\alpha, \beta : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei in einer Umgebung von ξ definierte Funktionen. Wir schreiben

$$\alpha \in o(\beta) :\Leftrightarrow \lim_{x \to \xi} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|\beta(x)\|} = 0.$$

$$\alpha \in \mathcal{O}(\beta) :\Leftrightarrow \limsup_{x \to \xi} \frac{\|\alpha(x)\|}{\|\beta(x)\|} < \infty.$$

8.6 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}, \vec{\xi}$ ein innerer Punkt von D. Dann heißt f an $\vec{\xi}$ *differenzierbar* (oder *total differenzierbar)* $:\Leftrightarrow \exists$ Vektor $v(\vec{\xi}) \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(\vec{x}) - f(\vec{\xi}) - \langle v(\vec{\xi}), \vec{x} - \vec{\xi} \rangle \in o(\|x - \xi\|)$, d.h. $\lim_{x \to \xi} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{\xi}) - \langle v(\vec{\xi}), \vec{x} - \vec{\xi} \rangle}{\|\vec{x} - \vec{\xi}\|} = 0$.

Der Vektor $v(\vec{\xi})$ heißt die *totale Ableitung* von f an $\vec{\xi}$.

8.7 Zusammenhang totale und partielle Differenzierbarkeit:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}, U \subset D$ offen.

(a) Falls f in $\vec{\xi}$ total differenzierbar ist, dann existieren in ξ alle partiellen Ableitungen und es gilt:
$$v(\vec{\xi}) = \text{grad } f(\vec{\xi})$$

(b) Falls auf U alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, dann ist f an allen $\vec{\xi} \in U$ total differenzierbar, mit $v(\vec{\xi}) = \text{grad } f(\vec{\xi})$, d.h. es gilt:
$$f(\vec{x}) = f(\vec{\xi}) + \text{grad } f(\vec{\xi}) \cdot (\vec{x} - \vec{\xi}) + o\,(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|).$$

8.8 Lemma Sei f an $\vec{\xi}$ total differenzierbar. Dann ist f an $\vec{\xi}$ stetig.

8.9 Definition Sei $D \subset \mathbb{R}^p$, ξ ein innerer Punkt von D und $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. f heißt *(total) differenzierbar* in ξ $:\Leftrightarrow \exists q \times p-$Matrix $J = J(f, \xi)$, so dass $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)-Jh}{\|h\|} = 0$.

$\left(\text{oder wie oben: } \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)-J(x-\xi)}{\|x-\xi\|} = 0\right)$.

Die Matrix J heißt *Jacobimatrix* (oder *Funktionalmatrix*).

ξ, x, h sind Vektoren in $\mathbb{R}^p$. $h \to 0$ bedeutet $h_1 \to 0, \dots h_p \to 0$; äquivalent: $\|h\| \to 0$.

8.10 Proposition Sei $D \subset \mathbb{R}^p$, D offen, $f : D \to \mathbb{R}^q$, $\xi \in D$.

(a) f sei in ξ differenzierbar. Dann sind alle f_j nach allen x_i partiell differenzierbar und es gilt:

$$J = J(f, \xi) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(\xi) \\ \text{grad } f_2(\xi) \\ \vdots \\ \text{grad } f_q(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\xi) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(\xi) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(\xi) \end{pmatrix}$$

(b) Sei f in ξ differenzierbar. Dann ist f in ξ stetig.

(c) Wenn alle $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi)$ existieren und stetig sind, dann ist f in ξ differenzierbar.

(d) f ist in ξ differenzierbar $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_q$ sind in ξ differenzierbar.

8.11 Kettenregel: Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, so dass $h := g \circ f$ definiert ist. Sei f an ξ differenzierbar mit Ableitung $J(f, \xi)$ und sei g an $\eta = f(\xi)$ differenzierbar mit Ableitung $J(g, \eta)$. Dann ist h an ξ differenzierbar mit Ableitung

$$J(h, \xi) = J(g, \eta) \cdot J(f, \xi).$$

8.12 Mittelwertsatz: Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D$ offen, f auf D stetig differenzierbar. Seien $\vec{\xi}$ und $\vec{\eta}$ in D, so dass die Verbindungsstrecke $\{\vec{\xi} + \nu(\vec{\eta} - \vec{\xi}) : \nu \in [0, 1]\}$ ganz in D enthalten ist.

Dann $\exists \nu_0 \in (0, 1)$ so dass $f(\vec{\eta}) - f(\vec{\xi}) = \langle \text{grad } f(\vec{\xi} + \nu_0(\vec{\eta} - \vec{\xi})), (\vec{\eta} - \vec{\xi}) \rangle$

8.13 Satz von Taylor: Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n, (m+1)$- mal stetig differenzierbar, $\vec{\xi}, \vec{x} \in D$, so dass die Verbindungsstrecke $\{\vec{\xi} + \theta(\vec{x} - \vec{\xi}) : \theta \in [0, 1]\}$ ganz in D enthalten ist. Sei $\vec{h} := \vec{x} - \vec{\xi}$ Dann $\exists \theta \in (0, 1)$, so dass

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{\xi}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(\vec{h} \cdot \text{grad } f)^k(\vec{\xi})}{k!}}_{T_m(f, \vec{x}, \vec{\xi})} + \underbrace{\frac{(\vec{h} \cdot \text{grad } f)^{m+1}(\vec{\xi} + \theta \vec{h})}{(m+1)!}}_{\text{Restglied}}.$$

wobei $(\vec{h} \cdot \text{grad } f)^k(\vec{y}) := \sum\limits_{j_1, \dots, j_k = 1}^{n} h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_k} \frac{\partial f^k}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} (\vec{y})$.

8.14 Umkehrsatz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n, U$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ auf ganz U stetig differenzierbar und $|J(f, \vec{x})| := \det(J(f, \vec{x})) \neq 0 \ \forall \vec{x} \in U$. Sei $\xi \in U$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Einschränkung von f auf $U_\varepsilon(\vec{\xi})$ die Menge $U_\varepsilon(\vec{\xi})$ bijektiv auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ abbildet. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist stetig differenzierbar und es gilt, mit $\eta := f(\vec{\xi}), J(f^{-1}, \eta) = J(f, \xi)^{-1}$.
Ein Vektor $\vec{\xi}$ mit grad $f(\vec{\xi}) = 0$ heißt *kritischer* Vektor.

8.15 Definition Sei f zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix

$$H = H(f, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

heißt *Hesse-Matrix* (oder Hessesche Matrix).

Nach dem Satz von Schwarz ist H eine symmetrische Matrix.

8.16 Kriterium für Extremwerte: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ (D offen, $D \subset \mathbb{R}^n$) zweimal stetig differenzierbar, $\vec{\xi} \in D$ und grad $f(\vec{\xi}) = 0$. Dann gilt:

(a) $H(f, \vec{\xi})$ positiv definit $\Rightarrow \vec{\xi}$ striktes lokales Minimum,

(b) $H(f, \vec{\xi})$ negativ definit $\Rightarrow \vec{\xi}$ striktes lokales Maximum,

(c) $H(f, \vec{\xi})$ indefinit $\Rightarrow \vec{\xi}$ kein lokales Extremum.

Punkte wie in (c) nennt man *Sattelpunkte.*

8.17 Multiplikatorregel von Lagrange: Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $S := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) = 0\}$, $\vec{\xi} \in S$ mit grad $g(\vec{\xi}) \neq 0$. Wenn $f|_S$ an ξ ein Maximum oder ein Minimum hat, dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: grad $f(\xi) = \lambda$ grad $g(\xi)$.

Die Multiplikatorregel von Lagrange liefert nur ein notwendiges, kein hinreichendes Kriterium. Um sicherzustellen, dass überhaupt ein Maximum oder ein Minimum existieren, verwendet man oft die folgende Aussage: Ist D kompakt (d.h. $\mathbb{R}^n \backslash D$ offen und D beschränkt), so nimmt jede stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein Maximum und ein Minimum an. Typische Beispiele von kompakten Mengen sind abgeschlossene Intervalle, Bälle, Kreise, Ellipsen, Rechtecke, Quader.

9 Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen der Form $y' = f(x, y)$:
Gegeben ist eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, g differenzierbar, so dass $g'(x) = f(x, g(x))$ gilt.

9.1 Integralgleichung Sei $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ stetig. $g : I \to I'$ ist Lösung von $y' = f(x, y)$ durch (x_0, y_0) d.h. $g(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \forall x \in I : g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, g(t))dt$.

9.2 Definition $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ genügt einer *Lipschitz-Bedingung*
$:\Leftrightarrow \exists L > 0\ \forall x \in I\ \forall y_1, y_2 \in I' : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$.
L heißt *Lipschitz- Konstante* zu f.
f genügt *lokal* einer Lipschitz-Bedingung:$\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in I \times I'\ \exists\ U_\delta(x, y) : f$ genügt in $U_\delta(x, y)$ einer Lipschitz-Bedingung.

9.3 Kriterium zur Lipschitz-Bedingung Falls $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert und beschränkt ist, genügt f einer Lipschitz-Bedingung. Falls $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiert und stetig ist, genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

9.4 Eindeutigkeitssatz Sei $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ stetig und genüge lokal einer Lipschitz-Bedingung. $\varphi : I \to I'$ und $\psi : I \to I'$ seien Lösungen von $y' = f(x, y)$
und $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in I$. Dann gilt $\varphi(x) = \psi(x)\ \forall x \in I$.

9.5 Existenzsatz von Picard und Lindelöf: Seien I und I' offene Intervalle,
$f : I \times I' \to \mathbb{R}$ sei stetig und genüge lokal einer Lipschitz-Bedingung, $(x_0, y_0) \in I \times I'$.
Dann existiert eine Lösung φ der gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch (x_0, y_0), d.h. $\varphi(x_0) = y_0$, bzw. $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$.

9.6 Trennung der Variablen (Differentialgleichung mit getrennten Variablen):
Sei $\tilde{f}(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ für $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I' \to \mathbb{R},\ g(y) \neq 0\ \forall y$.

Sei $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ und $G(y) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(t)}dt$.

Sei $F(I) \subset G(I')$.

Dann erfüllt die eindeutige Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ der Differentialgleichung. $y' = f(x)g(y)$ die folgende Gleichung:

$$G(\varphi(x)) = F(x)\ \forall x \in I.$$

$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0\ \forall y \Rightarrow G$ streng monoton wachsend oder fallend $\Rightarrow G$ invertierbar.
Wenn man G^{-1} findet, hat man $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$ bestimmt.

Homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung: $y' = a(x)y$.

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung: $y' = a(x)y + b(x)$.

9.7 Variation der Konstanten:
Sei $\varphi_0(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right)$ eine Lösung der homogenen Gleichung.
Dann ist $\varphi(x) = \varphi_0(x)(c + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\varphi_0(t)^{-1}}_{\text{Kehrwert}} b(t)dt)$ die eindeutige Lösung mit $\varphi(x_0) = c$.

9.8 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung:
$y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$

$y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$

Definitionsbereich von $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1}, f : U \to \mathbb{R}^{n+n}$.
Gesucht ist $y = \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $(x, \varphi(x)) \in U$.
Vorgegeben wird $\varphi(x_0) = c$.

9.9 Lineare Differentialgleichungssysteme:

$$y' = A(x)y + b(x), \text{ d.h. } \begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_n(x) \\ \vdots & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{array}$$

wobei alle $a_{ij} : I \to \mathbb{R}, b_i : I \to \mathbb{R}$ stetig sind, also $A : I \to \mathbb{R}^{n^2}, b : I \to \mathbb{R}^n$.
$f(x, y) = A(x)y + b(x)$ genügt einer Lipschitz-Bedingung.

9.10 Proposition

(a) $L(A, 0)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) Sei $\varphi \in L(A, b)$ eine Lösung des inhomogenen Systems $y' = Ay + b$. Dann ist $L(A, b) = \varphi + L(A, 0)$, d.h. $L(A, b) = \{\varphi + \psi : \psi \in L(A, 0)\}$.

9.11 Der Lösungsraum $L(A, 0)$ des homogenen Systems:

(a) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $L(A, 0)$ hat die Dimension n.

(b) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(A, 0)$ bilden genau dann eine Basis von $L(A, 0)$, wenn es ein $x_0 \in I$ gibt, so dass die Vektoren $\varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_n(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. In diesem Fall heißen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung $y' = A(x) \cdot y$.

9.12 Die Wronski-Determinante
$W := \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ hat eine Nullstelle genau dann, wenn sie konstant 0 ist. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ist ein Fundamentalsystem $\Leftrightarrow W \neq 0$. $W' = \text{sp}(A(x)) \cdot W$.

9.13 Der Lösungsraum $L(A, b)$ des inhomogenen Systems:
Sei ψ eine Lösung von $y' = Ay+b$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems. Dann ist $L(A, b) = \{\psi + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n : c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\} = \psi + L(A, 0)$.

9.14 Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten:
Sei A konstant, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(a) Sei λ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zu λ. Dann ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = e^{\lambda x} \cdot v$ eine Lösung von $y' = Ay$.

(b) Falls $\mathbb{R}^n$ eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Eigenvektoren von A besitzt (d.h. A ist diagonalisierbar) und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte, dann ist $\{e^{\lambda_1 x}v_1, \ldots, e^{\lambda_n x}v_n\}$ ein Fundamentalsystem zu $y' = Ay$.

9.15 Differentialgleichungen höherer Ordnung: Sei $n \geqslant 2$. Die Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ mit $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ stetig, ist äquivalent zum System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$\vdots$$

$$y_{n-1}' = y_n$$

$y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Dabei gelten die Entsprechungen $y_1 := y, y_2 := y', \ldots, y_n := y^{(n-1)}$.

9.16 Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Der Differentialgleichung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$ wird das Polynom $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{(n-1)} + \ldots + a_1 t + a_0$ zugeordnet.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine l-fache Nullstelle von $p(t)$, d.h. $p(t) = (x-\lambda)^l q(t)$. Dann sind die Funktionen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{l-1}e^{\lambda x}$ Lösungen der Differentialgleichung.

(b) Sei $p(t) = (t-\lambda_1)^{l_1}(t-\lambda_2)^{l_2}\ldots(t-\lambda_r)^{lr}$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Dann bilden die folgenden Funktionen ein Fundamentalsystem:

$$\begin{array}{ccccccc} e^{\lambda_1 x} & , & xe^{\lambda_1 x} & , & \ldots & , & x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ e^{\lambda_r x} & , & xe^{\lambda_r x} & , & \ldots & , & x^{l_r-1}e^{\lambda_r x} \end{array}$$

9.17 Exakte Differentialgleichungen: Seien $P, Q : I \times J \to \mathbb{R}$ Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen. Die Differentialgleichung $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ heißt *exakte Differentialgleichung*: $\Leftrightarrow \exists\ F : I \times J \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.
Das ist äquivalent zu: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

9.18 Potenzreihenansatz: z.B. für $y'' + a(x)y' + b(x)y = s(x), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, Anfangswertproblem zweiter Ordnung (genauso n-ter Ordnung), Voraussetzung: a, b, s besitzen Taylorentwicklungen (in gegebenem Intervall). Dann gilt: Die Lösung $y(x)$ besitzt auch eine Taylorentwicklung im selben Intervall.

9.19 Kompartimentmodelle: Gegeben "Behälter"(Kompartimente) $K_1, \ldots, K_n$. K_i enthält zur Zeit t genau $m_j(t)$ viele Masseneinheiten eines homogenen Materials, das zwischen manchen Behältern bewegt wird, Veränderung proportial zu t und zu $m_i(t)$. Differentialgleichungssystem ist $m' = K \cdot m$.