Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 27. Juni 2011
Aufgabenblatt 9

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion: Ein Automorphismus einer Gruppe G ist eine bijektive Abbildung $G \to G$, welche die Gruppenstruktur erhält. Ein Automorphismus eines Rings R ist eine bijektive Abbildung $R \to R$, welche die Ringstruktur erhält; analog für Körper. Im folgenden sollen Sie entscheiden, ob die gegebene algebraische Struktur endlich oder unendlich viele Automorphismen hat, und im endlichen Fall die Anzahl bestimmen.

(1) die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$
(2) der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
(3) die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$
(4) der Ring $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
(5) der Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
(6) der Körper $(\overline{\mathbb{Q}}, +, \cdot)$
(7) die Gruppe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$
(8) der Ring $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$
(9) die Gruppe $(\mathbb{Q}[x], +)$
(10) der Ring $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$

zu bearbeiten:

(1) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers der folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$.
 (a) $x^2 - 1$
 (b) $x^3 - 1$
 (c) $x^4 - 1$
 (d) $x^5 - 1$
 (e) $x^5 - 7$

(2) Sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ein Körper mit zwei Elementen. Sei K der Zerfällungskörper von
$$x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1) \in \mathbb{F}_2[x].$$
Wie viele Elemente hat k? Schreiben Sie K als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit Basis, und geben Sie die Additions- und Multiplikationstafel für k an.

(3) Sei α eine reelle Zahl mit $\alpha^4 = 5$. Zeigen Sie, dass
 (a) $\mathbb{Q}(i\alpha^2)/\mathbb{Q}$ normal ist;
 (b) $\mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)/\mathbb{Q}(i\alpha^2)$ normal ist;
 (c) $\mathbb{Q}(\alpha + i\alpha)/\mathbb{Q}$ nicht normal ist.

(4) Sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, t eine Unbestimmte (d.h. transzendent über $\mathbb{F}_2$), und $K = \mathbb{F}_2(t)$. Sei $f(x) = x^2 - t \in K[x]$ und L der Zerfällungskörper. Zeigen Sie, dass die Erweiterung L/K nicht separabel ist.

(5) Sei E/K eine algebraische Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass E normal über K ist, genau dann wenn jedes irreduzible Polynom $f(x) \in K[x]$ sich in E schreiben lässt als $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$, wobei die f_i irreduzible Polynome in $E[x]$ sind, die alle denselben Grad haben.

Bitte wenden!

schriftliche Aufgaben:

(1) *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass jede Körpererweiterung von Grad 2 normal ist.

(b) Sei $f(x) \in K[x]$ ein Polynom von Grad n, und L der Zerfällungskörper. Zeigen Sie, dass $[L : K]$ die Zahl $n!$ teilt.

(2) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie die Zerfällungskörper der folgenden Polynome sowie den Grad über $\mathbb{Q}$.

(a) $x^3 - 2$

(b) $(x^3 + 2)(x^2 - 2)$

(c) $x^6 + x^3 + 1$

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 06.07.2011.

Die Übungen finden zum neunten Mal am Mittwoch, 06.07.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00