Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 20. Juni 2011
Aufgabenblatt 8

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion: Wahr oder falsch?

(1) $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[i]) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(2) $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\sqrt{2}]) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(3) $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
(4) $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$
(5) $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(e^{\frac{2\pi i}{11}}) \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
(6) $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(e^{\frac{2\pi i}{11}}) \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

zu bearbeiten:

(1) Sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Zeigen Sie, dass jeder Körperautomorphismus $\varphi : k \to k$ die Elemente von $\mathbb{Q}$ fest läßt. Bestimmen Sie alle Körperautomorphismen von k sowie die Multiplikationstabelle der Gruppe der Körperautomorphismen.

(2) Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass jeder k-Vektorraum eine k-Basis hat.
(Hinweis: Wenden Sie Zorns Lemma an.)

(3) Ein Körper K heißt *quadratisch abgeschlossen*, wenn jede quadratische Gleichung mit Koeffizienten aus K eine Lösung in K hat.
(a) Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluß von K. Zeigen Sie: Es gibt einen eindeutig bestimmten quadratisch abgeschlossenen Körper $K \subset K^{(2)} \subset \overline{K}$, so dass jeder andere quadratisch abgeschlossene Teilkörper $K \subset K' \subset \overline{K}$ diesen $K^{(2)}$ enthält.
(b) Ist $\mathbb{Q}^{(2)}/\mathbb{Q}$ endlich?
(c) Ist $\mathbb{Q}^{(2)}$ algebraisch abgeschlossen?

(4) Finden Sie eine algebraische Körpererweiterung K von $\mathbb{Q}(x)$, so dass das Polynom $f(y) = y^2 - x^3/(x^2+1) \in \mathbb{Q}(x)[y]$ eine Nullstelle in K hat.

(5) Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ algebraisch vom Grad n über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:
(a) $[\mathbb{Q}[z, \overline{z}] : \mathbb{Q}[z + \overline{z}]] \geq 2$.
(b) $\mathrm{Re}(z)$ ist algebraisch vom Grad $\leq \frac{n(n-1)}{2}$ über $\mathbb{Q}$.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(4 Punkte)* Seien p eine Primzahl und L/K eine Körpererweiterung mit $[L : K] = p$. Zeigen Sie, dass $L = K(a)$ für alle $a \in L$, $a \notin K$.

(2) *(6 Punkte)* Sei $K \subseteq E$ eine Körpererweiterung, $L = \{\alpha \in E \mid \alpha \text{ algebraisch über } K\}$. Zeigen Sie: L ist ein Körper und es gilt $L = K(L)$. Zeigen Sie, dass der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}$ gerade $\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\}$ ist.

Bitte wenden!

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 29.06.2011.

Die Übungen finden zum achten Mal am Mittwoch, 29.06.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00