Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 06. Juni 2011
Aufgabenblatt 7

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion: Sei $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $K_3 = \mathbb{Q}(i)$, $K_4 = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$, und $K_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, e^{\frac{2\pi i}{3}})$.

(1) Was ist der Grad $[K_2 : \mathbb{Q}]$ von K_2 über $\mathbb{Q}$?
(2) Was ist $[K_4 : \mathbb{Q}]$?
(3) Was ist $[K_5 : \mathbb{Q}]$?
(4) Gilt $K_1 \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 2)$?
(5) Gilt $K_4 \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 1)$?
(6) Gilt $i \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$?
(7) Existiert ein Körperisomorphismus $K_1 \cong \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, oder ein $\mathbb{Q}$-Vektorraumisomorphismus, oder ein Ringhomomorphismus?

zu bearbeiten:

(1) Entscheiden Sie für jedes der folgenden Polynome, ob es in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist. Falls nicht, zerlegen Sie es in unzerlegbare Faktoren.
 (a) $3x^7 + 5$
 (b) $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6$
 (c) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 6x - 3$
 (d) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(2) Zeigen Sie: Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring von L, der K enthält, ein Körper ist.

(3) Seien a, b zwei Elemente, algebraisch abhängig über K, mit Minimalpolynomen $f(x)$ bzw $g(x)$ in $K[x]$. Falls die Grade $\deg f(x)$ und $\deg g(x)$ teilerfremd sind, zeigen Sie, dass $g(x)$ auch irreduzibel in $K(a)[x]$ ist.

(4) Sei $\overline{\mathbb{Q}}$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $[\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]$ unendlich ist.

(5) Gibt es einen Erweiterungskörper K von $\mathbb{R}$ mit Grad $[K : \mathbb{R}]$ ungerade? (Begründetes Beispiel oder Beweis der Nicht-Existenz.)

(6) Sei K ein Körper, x eine Unbestimmte. Sei $y = x^3/(x+1)$. Finden Sie das Minimalpolynom von x über $k(y)$.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Sei K ein Körper, $L = K(a)$, wobei a algebraisch abhängig über K ist und ungeraden Grad hat. Zeigen Sie, dass $L = K(a^2)$ gilt.

(2) *(5 Punkte)* Seien E/L und L/K Körpererweiterungen. Zeigen Sie:
 (a) E/K ist algebraisch $\Leftrightarrow$ E/L und L/K sind algebraisch.
 (b) E/K ist endlich $\Leftrightarrow$ E/L und L/K sind endlich.

Bitte wenden!

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 22.06.2011.

Die Übungen finden zum siebten Mal am Mittwoch, 22.06.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00