

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

- (1)
 - (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass n^2 kongruent zu 0 oder 1 modulo 4 ist.
 - (b) Sei p eine Primzahl, die kongruent zu 3 modulo 4 ist. Zeigen Sie, dass p in $\mathbb{Z}[i]$ prim ist.
 - (c) Sei p eine ungerade Primzahl, die eine ganze Zahl der Form $x^2 + 1$ teilt, für ein $x \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann p kongruent zu 1 modulo 4 ist.
 - (d) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die kongruent zu 1 modulo 4 sind.
- (2)
 - (a) Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass dann R ein Körper ist.
 - (b) Sei k ein endlicher Körper mit Elementen $x_0 = 0, x_1, \dots, x_n$. Zeigen Sie, dass gilt:
 $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = -1$.
- (3) Sei $k = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in k \right\}$.
 - (a) Zeigen Sie: F ist ein Körper (mit Addition und Multiplikation von Matrizen). Ist F ein Erweiterungskörper von k und als solcher endlich und/oder einfach?
 - (b) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $k[x]$ vom Grad 2.
 - (c) Ist das Polynom $f(x) = x^2 + x + 1$ irreduzibel über F ?
 - (d) Ist F isomorph zum Ring $k[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$?
- (4) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ über
 - (a) $K_1 = \mathbb{Q}$
 - (b) $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$
 - (c) $K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$
 - (d) $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$
 - (e) $K_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$

schriftliche Aufgaben:

- (1) (5 Punkte) Sei $p(x) = x^3 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
 - (a) Finden Sie das multiplikative Inverse von $x+1 + \langle p(x) \rangle$ im Körper $F := \mathbb{Q}[x]/\langle p(x) \rangle$.
 - (b) Das Polynom $p(x)$ kann man nun auch als Polynom mit Koeffizienten in F auffassen. Geben Sie eine Nullstelle von $p(x)$ in F an.
- (2) (5 Punkte) Sei k ein Körper, E ein Erweiterungskörper und $\alpha \in E$ transzendent. Zeigen Sie, dass α^2 ebenfalls transzendent ist, und dass $k(\alpha^2) \subsetneq k(\alpha)$ gilt.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 08.06.2011.

Die Übungen finden zum sechsten Mal am Mittwoch, 08.06.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
<http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t>

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00